

अध्याय 1

वास्तविक संख्याएँ

[REAL NUMBERS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
3	1	—	—	1 + 1 + 1 + 2 = 5 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. 96 और 404 का H.C.F. होगा—
(a) 120 (b) 4 (c) 10 (d) 3.
2. 12 और 15 का H.C.F. होगा—
(a) 3 (b) 4 (c) 10 (d) 5.
3. दो संख्याओं का गुणनफल = 32 तथा उनका L.C.M. = 8 है, तो उनका H.C.F. होगा—
(a) 4 (b) 8 (c) 32 (d) 256.
4. 4 और 7 का महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) होगा—
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4.
5. किसी पूर्णांक m के लिए सम पूर्णांक निम्न स्वरूप का होता है—
(a) $2m + 3$ (b) $2m + 1$
(c) $2m$ (d) $2m + 5$.
6. संख्याओं 5, 15, 20 के लिए L.C.M. और H.C.F. का अनुपात होगा—
(a) 9 : 1 (b) 4 : 3 (c) 11 : 1 (d) 12 : 1.

उत्तर— 1. (b), 2. (a), 3. (a), 4. (a), 5. (c), 6. (d).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. भाज्य = भाजक × भागफल +
2. संख्याओं 8, 9 और 25 के HCF का मान होगा।

उत्तर— 1. शेषफल, 2. 1।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए—

1. दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ है।
2. एक प्राकृत संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, उसके गुणनखंडों के क्रम को छोड़ते हुए अद्वितीय होता है।

उत्तर— 1. सत्य, 2. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. 94 और 404 का HCF लिखिए।
2. किसी पूर्णांक P के लिए $2P + 1$ सम होगा या विषम। बतलाइए।

उत्तर— 1. 2, 2. विषम।

प्रश्न 5. संख्याओं 135 और 225 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

हल : चरण-I : यहाँ $225 > 135$, अतः यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$225 = 135 \times 1 + 90 \text{ (शेषफल)}$$

चरण-II : चूँकि $90 \neq 0$, अतः 90 एवं 135 पर प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$135 = 90 \times 1 + 45 \text{ (शेषफल)}$$

चरण-III : चूँकि शेषफल $45 \neq 0$, अतः 90 एवं 45 पर प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$90 = 45 \times 2 + 0 \text{ (शेषफल)}$$

अब चूँकि शेषफल 0 आया है,

∴ नया भाजक = 45 होगा।

तब HCF (135, 225) = 45.

उत्तर

प्रश्न 6. संख्याओं 867 और 255 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

हल : 867 और 255

चरण 1. यहाँ $867 > 255$ है। हम 867 और 255 पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$867 = 255 \times 3 + 102$$

चरण 2. क्योंकि शेषफल $102 \neq 0$ है, इसलिए हम 255 और 102 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके, निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$255 = 102 \times 2 + 51$$

6 | नवबोध प्रश्न-बैंक

चरण 3. क्योंकि शेषफल $51 \neq 0$ है, इसलिए हम नए भाजक 102 और नए शेषफल 51 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके, निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$102 = 51 \times 2 + 0$$

यहाँ शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इसलिए प्रक्रिया यहाँ समाप्त हो जाती है। चूँकि इस स्थिति में भाजक 51 है, इसलिए 867 और 255 का HCF 51 है।

$$\begin{aligned} \text{ध्यान दीजिए— HCF (102, 51)} \\ &= \text{HCF (255, 102)} \\ &= \text{HCF (867, 255)} = 51. \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

~~प्रश्न 7~~ एक मिठाई विक्रेता के पास 420 काजू की बर्फियाँ और 130 बादाम की बर्फियाँ हैं। वह इनकी ऐसी ढेरियाँ बनाना चाहती है कि प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये ढेरियाँ बर्फी की परात में न्यूनतम स्थान घेरें। इस काम के लिए प्रत्येक ढेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती हैं ?

हल : 420 के अभाज्य गुणखण्ड

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

130 के अभाज्य गुणखण्ड

$$= 2 \times 5 \times 13$$

अब प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणखण्ड में

सबसे छोटी घात 2^1 एवं 5^1 है।

$$\therefore \text{HCF (420, 130)} = 2 \times 5 = 10$$

अतः प्रत्येक ढेरी में 10 बर्फियाँ रखी जा सकती हैं। उत्तर

~~प्रश्न 8~~ किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं ?

हल : हम HCF (616, 32) ज्ञात करते हैं। यह HCF ही समान संख्या वाले उन स्तंभों की अधिकतम संख्या होगी, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं। यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके

$$616 = 32 \times 19 + 8$$

$$32 = 8 \times 4 + 0$$

अतः 616 और 32 का HCF 8 है।

इसलिए, समान संख्या वाले उन स्तंभों की अधिकतम संख्या, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं, 8 है।

उत्तर

प्रश्न 9. दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है एवं $b = 2$.

तब यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से किसी पूर्णांक $q \geq 0$ के लिए

$$a = 2q + r$$

जहाँ $r = 0$ तो $a = 2q$

$r = 1$ तो $a = 2q + 1$

यदि $a = 2q$ है तो यह एक सम पूर्णांक है।

अब एक धनात्मक पूर्णांक या तो सम या विषम हो सकता है।

इसलिए कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप में होगा। यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 10. दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल : माना एक धनात्मक विषम पूर्णांक $a = 4q + r$, जहाँ $0 \leq r < 4$ तथा r एक पूर्णांक है तथा r का मान 0, 1, 2, 3 हो सकता है।

अतः संख्या $a, 4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3$ के रूप का हो सकता है।

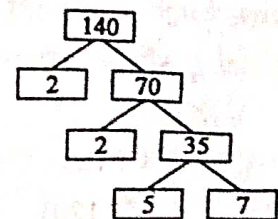
चूँकि a एक धनात्मक विषम पूर्णांक है।

\therefore यह $4q, 4q+2$ के रूप में नहीं हो सकता (क्योंकि दोनों 2 से विभाज्य हैं।)

\therefore कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होगा। यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 11. संख्या 140 को अभाज्य गुणखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : 140

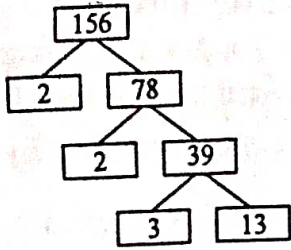


$$\text{अतः, } 140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5^1 \times 7^1.$$

उत्तर

प्रश्न 12. संख्या 156 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

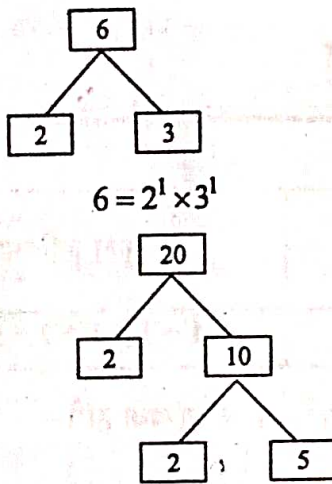
हल : 156



अतः, $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$. उत्तर

प्रश्न 13. संख्याओं 6 एवं 20 का अभाज्य गुणनखण्डन विधि से HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए।

हल :



$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$$

$$\therefore \text{HCF}(6, 20) = 2$$

$$\text{एवं } \text{LCM}(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 14. संख्याओं 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखण्डन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखण्ड

2	6	2	72	2	120
3	3	2	36	2	60
	1	2	18	2	30
		3	9	3	15
		3	3	5	5
			1		1

$$6 = 2 \times 3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\therefore \text{HCF}(6, 72 \text{ और } 120) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{एवं } \text{LCM}(6, 72 \text{ और } 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$= 8 \times 9 \times 5 = 360.$$

उत्तर

प्रश्न 15. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा पूर्णाकों 12, 15 और 21 के H.C.F. और L.C.M. ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } 12 = 2^2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$21 = 3 \times 7$$

$$\text{H.C.F.}(12, 15, 21) = 3.$$

$$\text{एवं } \text{LCM}(12, 15, 21) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 420.$$

उत्तर

प्रश्न 16. $\text{HCF}(306, 657) = 9$ दिया है। $\text{LCM}(306, 657)$ ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \text{LCM}(306, 657)$$

$$= \frac{306 \times 657}{\text{HCF}(306, 657)}$$

$$= \frac{306 \times 657}{9}$$

$$= 22338.$$

उत्तर

प्रश्न 17. संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

हल : हम जानते हैं कि $4^n = (2)^{2n}$ का गुणनखण्ड 5 नहीं है। अतः किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 4^n संख्या अंक 0 पर समाप्त नहीं होगी। क्योंकि 0 पर समाप्त होने वाली संख्याएँ 5 से विभाज्य होती हैं और यह संख्या 5 से विभाज्य नहीं है।

अतः ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त हो।

उत्तर

प्रश्न 18. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ एवं $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं ?

$$\text{हल : (i) } 7 \times 11 \times 13 + 13$$

$$= (7 \times 11 + 1) \times 13$$

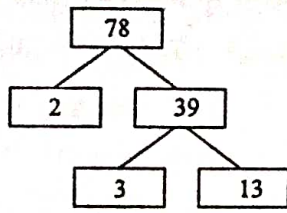
$$= (77 + 1) \times 13$$

$$= 78 \times 13$$

$$= 2 \times 3 \times 13 \times 13$$

$$\text{अतः } 7 \times 11 \times 13 + 13 = 2 \times 3 \times 13 \times 13$$

$$= 2 \times 3 \times 13^2$$



चूँकि $7 \times 11 \times 13 + 13$ को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, अतः $7 \times 11 \times 13 + 13$ एक भाज्य संख्या है।

उत्तर

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5 \\
 & = (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) \times 5 \\
 & = (1008 + 1) \times 5 \\
 & = 1009 \times 5 = 5 \times 1009.
 \end{aligned}$$

चूँकि $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, अतः $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ एक भाज्य संख्या है। उत्तर ●●

अध्याय 2

बहुपद

[POLYNOMIALS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
3	1	—	—	$1 + 1 + 1 + 2 = 5$ अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha \cdot \beta$ का मान होगा—

- (a) $\frac{c}{a}$ (b) $\frac{a}{c}$
 (c) $-\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{a}{c}$

2. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha + \beta$ का मान होगा—

- (a) $\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$
 (c) $-\frac{b}{a}$ (d) $-\frac{a}{c}$

3. रेखीय बहुपद $ax + b$ का शून्यक होगा—

- (a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$
 (c) $-\frac{b}{a}$ (d) ab

4. बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक होंगे—

- (a) $\pm\sqrt{3}$ (b) ± 3 (c) 3 (d) 9.

5. बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक होंगे—

- (a) 2, 5 (b) -2, -5 (c) -2, 5 (d) 2, -5.

6. बहुपद $(x+1)(x^2 - x - x^4 + 1)$ के लिए घात होगी—

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5.

7. यदि द्विघात बहुपद के शून्यक -3 तथा 4 हों, तो द्विघात बहुपद होगा—

- (a) $x^2 - x - 12$ (b) $x^2 + x + 12$

- (c) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ (d) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 6$.

8. किसी बहुपद के कुल शून्यक, उस बहुपद के आरेख के निम्नलिखित पर प्रतिच्छेदन के कुल बिन्दुओं की संख्या के बराबर होते हैं—

- (a) X-अक्ष पर
 (b) Y-अक्ष पर
 (c) X-अक्ष तथा Y-अक्ष दोनों पर
 (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर— 1. (a), 2. (c), 3. (c), 4. (a), 5. (b), 6. (d), 7. (a), 8. (a).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. रेखीय बहुपद $ax+b$ का शून्यक है।
2. दो बहुपदों का गुणनफल एक होता है।
3. बहुपद x^2+4x+8 के शून्यकों का योग है।
4. बहुपद x^2+4x+8 के शून्यकों का गुणनफल है।
5. यदि बहुपद $(k-1)x^2+kx+1$ का एक शून्यक -3 हो, तब k का मान होगा।

उत्तर— 1. $-\frac{b}{a}$, 2. बहुपद, 3. -4 , 4. 8 , 5. $\frac{4}{3}$.

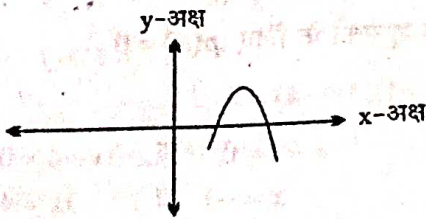
प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. बीजीय व्यंजक $x^2-2\sqrt{x}+7$ बहुपद नहीं है।
2. शून्य बहुपद की घात शून्य है।
3. शून्य बहुपद की घात अपरिभाषित है।
4. n घात वाले बहुपद के अधिकतम n शून्यक हो सकते हैं।

उत्तर— 1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. रेखिक बहुपद की घात कितनी होती है?
2. द्विघात बहुपद की घात कितनी होती है?
3. त्रिघात बहुपद की घात कितनी होती है?
4. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y=p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है। $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



उत्तर— 1. एक, 2. दो, 3. तीन, 4. दो।

प्रश्न 5. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}$, -1 हैं।

हल : माना द्विघाती बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक α व β हैं।

प्रश्नानुसार, $\alpha + \beta = \frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$

तथा $\alpha \cdot \beta = -1 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{4}$

अतः $a = 4, b = -1, c = -4$

\therefore अभीष्ट बहुपद $= 4x^2 - x - 4$.

उत्तर

प्रश्न 6. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों

के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद ax^2+bx+c है और इसके शून्यक α, β हैं। तब, प्रश्नानुसार

$$\alpha + \beta = \sqrt{2}, \alpha \cdot \beta = \frac{1}{3}$$

अब, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ से,

$$\frac{-b}{a} = \sqrt{2} \text{ तथा } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \text{ से,}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

यदि $a = 3$, तब $b = -3\sqrt{2}$ और $c = 1$ होगा।

अभीष्ट द्विघात बहुपद होगा—

$$3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1.$$

उत्तर

प्रश्न 7. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 1 और 1 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद ax^2+bx+c है। यदि इसके शून्यक α, β हैं। तब, प्रश्नानुसार,

$$\alpha + \beta = 1, \alpha \cdot \beta = 1$$

यदि $a = 1$ है, तब $b = -1$ तथा $c = 1$ होगा।

\therefore अभीष्ट बहुपद होगा—

$$x^2 - x + 1.$$

उत्तर

प्रश्न 8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल : माना ax^2+bx+c एक द्विघात बहुपद है।

जिसके शून्यक α एवं β हैं।

तब $\alpha + \beta = -3$ एवं $\alpha \beta = 2$

$$\frac{-b}{a} = -3 \text{ एवं } \frac{c}{a} = 2$$

$$\frac{b}{a} = 3 \text{ एवं } \frac{c}{a} = 2$$

$$\frac{b}{3} = \frac{a}{1} \text{ एवं } \frac{c}{2} = \frac{a}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$$

तब $a = 1, b = 3, c = 2$

तब $ax^2+bx+c = x^2+3x+2$ एक द्विघात बहुपद होगा।

उत्तर

~~प्रश्न 9.~~ एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग एवं गुणनफल क्रमशः $-\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α, β हैं।

$$\text{तब } \alpha + \beta = \frac{-1}{4} \text{ एवं } \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

$$\text{अब } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{4},$$

[तुलना से $b=1, a=4, c=1$]

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

\therefore अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c = 4x^2 + x + 1$ होगा।

उत्तर

~~प्रश्न 10.~~ एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल 4 और 1 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है, जिसके मूल α एवं β हैं। तब

$$\alpha + \beta = \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{एवं } \alpha\beta = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना से $a=1, b=-4, c=1$

\therefore अभीष्ट बहुपद होगा—

$$ax^2 + bx + c = x^2 - 4x + 1. \quad \text{उत्तर}$$

~~प्रश्न 11.~~ द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों के तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

$$\text{हल : } x^2 - 2x - 8$$

$$\text{माना, } p(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$\begin{aligned} \text{तब, } p(x) &= x^2 - 4x + 2x - 8 \\ &= x(x-4) + 2(x-4) \\ &= (x-4)(x+2) \end{aligned}$$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए,

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ (x-4)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x-4 &= 0 \quad \text{या } x+2=0 \\ \Rightarrow x &= 4 \quad \text{या } x=-2 \\ \Rightarrow x &= 4, -2 \end{aligned}$$

अतः $p(x)$ के शून्यक 4 और -2 हैं। उत्तर

शून्यक का गुणांकों से संबंध— इसके शून्यकों का योग

$$\begin{aligned} &= 4 + (-2) \\ &= 2 = \frac{-(-2)}{1} \\ &= \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{शून्यकों का गुणनफल} &= 4 \times (-2) = -8 = \frac{-8}{1} \\ &= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

अतः संबंध सत्य है।

~~प्रश्न 12.~~ द्विघात बहुपद $3x^2 - x - 4$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

$$\text{हल : माना } p(x) = 3x^2 - x - 4$$

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 4x + 3x - 4 \\ &= x(3x-4) + 1(3x-4) \\ &= (x+1)(3x-4) \end{aligned}$$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए $p(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)(3x-4) &= 0 \\ \Rightarrow x+1 &= 0 \quad \text{या } 3x-4=0 \\ \Rightarrow x &= -1 \quad \text{या } 3x=4 \\ \Rightarrow x &= -1 \quad \text{या } x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

अतः $p(x)$ के शून्यक -1 एवं $\frac{4}{3}$ होंगे। उत्तर

शून्यक का गुणांकों से संबंध—

$$\begin{aligned} \text{अब शून्यकों का योग} &= -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \\ &= \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{4/3}{(-1)} = -\frac{4}{3} = \frac{\text{अचर राशि}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः संबंध सत्य है।

प्रश्न 13. द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $x^2 + 7x + 10$

माना, $p(x) = x^2 + 7x + 10$

तब, $x^2 + 7x + 10 = 0$

$$x^2 + 5x + 2x + 10 = 0$$

$$x(x+5) + 2(x+5) = 0$$

$$(x+2)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ या } x = -5$$

अतः $p(x)$ के शून्यक -2 एवं -5 होंगे।

उत्तर

शून्यक का गुणांकों से संबंध—

$$\text{अब शून्यकों का योग} = -2 + (-5) = -7 = \frac{-7}{1}$$

$$= \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1}$$

$$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः सम्बन्ध सत्य है।

प्रश्न 14. द्विघात बहुपद $3x^2 + 4x - 4$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $3x^2 + 4x - 4$

$$= 3x^2 + 6x - 2x - 4$$

$$= 3x(x+2) - 2(x+2)$$

$$= (3x-2)(x+2)$$

यदि, $3x^2 + 4x - 4 = 0$ तब $x+2 = 0$ या $3x-2 = 0$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ या } 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ या } x = \frac{2}{3}$$

अतः $3x^2 + 4x - 4$ के शून्यक -2 एवं $\frac{2}{3}$ होंगे। उत्तर

शून्यक का गुणांकों से सम्बन्ध—

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + \frac{2}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$= \frac{-6+2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$= \frac{-4}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-4}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः संबंध सत्य है।

प्रश्न 15. द्विघात बहुपद $5t^2 + 12t + 7$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $5t^2 + 12t + 7 = 5t^2 + 7t + 5t + 7$

$$= t(5t+7) + 1(5t+7)$$

$$= (t+1)(5t+7)$$

अब $5t^2 + 12t + 7 = 0$ तब $t+1 = 0$ या $5t+7 = 0$

$$\Rightarrow t = -1 \text{ या } t = \frac{-7}{5}$$

अतः $5t^2 + 12t + 7$ के शून्यक -1 एवं $-\frac{7}{5}$ होंगे। उत्तर

शून्यक का गुणांकों से सम्बन्ध—

$$\text{शून्यकों का योग} = -1 - \frac{7}{5}$$

$$= \frac{-12}{5} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = -1 \times \frac{-7}{5}$$

$$= \frac{7}{5} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः संबंध सत्य है।

अध्याय 3

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म [PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	—	—	1	1 + 1 + 4 = 6 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. निम्नलिखित में से दो चरों में रैखिक समीकरण है—

- (a) $2x^2 + 3y = 5$ (b) $3x + 4y^2 = 6$
 (c) $4x^2 + 5y^2 = 6$ (d) $5x + 6y = 7$.

2. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ तो रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y$

$+ c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का—

- (a) एक अद्वितीय हल होगा (b) कोई हल नहीं होगा
 (c) अनन्ततः अनेक हल होंगे (d) इनमें से कोई नहीं।

3. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो रैखिक समीकरण युग्म

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का—

- (a) एक अद्वितीय हल होगा
 (b) कोई हल नहीं होगा
 (c) अनन्ततः अनेक हल होंगे
 (d) इनमें से कोई नहीं।

4. जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो रैखिक समीकरण युग्म

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का :

- (a) एक अद्वितीय हल होगा
 (b) कोई हल नहीं होगा
 (c) अनन्ततः अनेक हल होंगे
 (d) इनमें से कोई नहीं।

5. रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का एक अद्वितीय हल होने की शर्त है—

(a) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

6. रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का कोई हल नहीं होने की शर्त है—

(a) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

7. रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के अनन्त अनेक हल होने की शर्त है—

(a) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—1. (d), 2. (a), 3. (b), 4. (c), 5. (a), 6. (b), 7. (c).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. समीकरण $2x + 3y = 5$ में यदि $x = 1$ तो $y = \dots\dots$ होगा।

2. वह समीकरण जिसको $ax+by+c=0$ के रूप में रखा जा सकता है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों x और y में एक समीकरण कहलाता है।

3. समीकरण $2x+y=k$ में यदि $x=2, y=1$ हो, तो k का मान होगा।

उत्तर— 1. 1, 2. रैखिक, 3. 5।

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. दो चरों में एक रैखिक समीकरण के अनेक हल होते हैं।
2. रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल उसको निरूपित करने वाली रेखा पर स्थित एक बिन्दु होता है।

उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. दो चरों में रैखिक समीकरण का मानक रूप लिखिए।
2. रैखिक समीकरण $y=mx+3$ में यदि $x=-2, y=5$ हो, तो m का क्या मान होगा ?

उत्तर—1. $ax+by+c=0$, 2. -1 ।

प्रश्न 5. समीकरण युग्म

$$x+3y=6$$

$$2x-3y=12$$

को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

हल : $x+3y=6$... (1)

$2x-3y=12$... (2)

समी. (1) से, $x=6-3y$... (3)

x का मान समी. (2) में रखने पर,

$$2(6-3y)-3y=12$$

$$12-6y-3y=12$$

$$-9y=12-12$$

$$-9y=0$$

$$y=0$$

समी. (3) में $y=0$ रखने पर,

$$x=6-3 \times 0=6$$

$$x=6, y=0$$

उत्तर

प्रश्न 6. समीकरण युग्म

$$x-2y=0$$

$$3x+4y=20$$

को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

हल : $x-2y=0$... (1)

$3x+4y=20$... (2)

समी. (1) से,

$x=2y$... (3)

x का मान समी. (2) में रखने पर,

$$3(2y)+4y=20$$

$$6y+4y=20$$

$$10y=20$$

$$y=\frac{20}{10}=2$$

समी. (3) में $y=2$ रखने पर,

$$x=2 \times 2=4$$

$$x=4, y=2.$$

उत्तर

प्रश्न 7. दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो संख्याएँ x और y हैं ($x > y$)। तब, बना रैखिक समीकरण युग्म हैं—

$x-y=26$... (1)

$x=3y$... (2)

समी. (2) से x के मान को समी. (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$3y-y=26$$

$$\Rightarrow 2y=26$$

$$\Rightarrow y=\frac{26}{2}=13$$

y के इस मान को समी. (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$x=3 \times 13=39$$

अतः, अभीष्ट संख्याएँ 39 और 13 हैं।

उत्तर

सत्यापन— $x=39$ और $y=13$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समी. (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं। जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

$$x-y=39-13=26$$

$$3y=3 \times 13=39=x$$

अतः प्राप्त हल सही है।

~~प्रश्न 8. रेखिक समीकरण युग्म~~

$$7x - 15y = 2$$

$$x + 2y = 3$$

को विलोपन विधि से हल कीजिए।

हल : $7x - 15y = 2$... (1)

$$x + 2y = 3$$
 ... (2)

समी. (1) में 1 का एवं (2) में 7 का गुणा करके घटाने पर,

$$\begin{array}{r} 7x - 15y = 2 \\ 7x + 14y = 21 \\ \hline -29y = -19 \end{array}$$

$$y = \frac{19}{29}$$

$y = \frac{19}{29}$ समी. (1) में रखने पर,

$$7x - 15\left(\frac{19}{29}\right) = 2$$

$$7x - \frac{285}{29} = 2$$

$$7x = 2 + \frac{285}{29}$$

$$= \frac{58 + 285}{29}$$

$$= \frac{343}{29}$$

$$\therefore x = \frac{343}{29} = \frac{49}{7/29} = \frac{49}{29}$$

$$x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$$

उत्तर

~~प्रश्न 9. रेखिक समीकरण युग्म~~

$$3x + 5y - 8 = 0$$

$$9x = 2y + 7$$

को विलोपन विधि से हल कीजिए।

हल : $3x + 5y - 8 = 0$

$$3x + 5y = 8$$
 ... (1)

$$9x = 2y + 7$$

$$9x - 2y = 7$$
 ... (2)

समी. (1) में 9 तथा समी. (2) में 3 का गुणा करके घटाने पर,

$$27x + 45y = 72$$

$$7x + 6y = 21$$

$$\hline -20y = -51$$

$$y = 1$$

$y = 1$ समी. (1) में रखने पर,

$$3x + 5(1) = 8$$

$$3x = 8 - 5$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

$$x = 1, y = 1.$$

उत्तर

प्रश्न 10. दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति महीने में ₹ 2000 बचा लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

हल : पहले व्यक्ति की मासिक आय = $9x$

दूसरे व्यक्ति की मासिक आय = $7x$

पहले व्यक्ति का खर्च = $4y$

दूसरे व्यक्ति का खर्च = $3y$

अब प्रश्नानुसार,

$$9x - 4y = 2000$$
 ... (1)

$$7x - 3y = 2000$$
 ... (2)

समी. (1) में 7 तथा समी. (2) में 9 का गुणा करके घटाने पर,

$$63x - 28y = 14000$$

$$63x - 27y = 18000$$

$$\hline -y = -4000$$

$$y = 4000$$

y का मान समी. (1) में रखने पर,

$$9x - 4 \times 4000 = 2000$$

$$9x - 16000 = 2000$$

$$9x = 16000 + 2000$$

$$9x = 18000$$

$$x = \frac{18000}{9} = 2000$$

पहले व्यक्ति की मासिक आय = $9 \times 2000 = ₹ 18000$

दूसरे व्यक्ति की मासिक आय = $7 \times 2000 = ₹ 14000$.

उत्तर

प्रश्न 11. ज्ञात कीजिए कि रेखिक समीकरण युग्म

$$2x + y = 5$$

$$3x + 2y = 8$$

का एक अद्वितीय हल है या कोई हल नहीं है या अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। अद्वितीय हल की स्थिति में उसे वज्र गुणन विधि से हल कीजिए।

हल : दिया हुआ रेखिक समीकरण युग्म है :

$$2x + y = 5 \quad \dots(1)$$

$$3x + 2y = 8 \quad \dots(2)$$

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$

$$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -8$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अतः दिए हुए रेखिक समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है। तब,

वज्र-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(1)(-8) - (2)(-5)} = \frac{y}{(-5)(3) - (-8)(2)} = \frac{1}{(2)(2) - (3)(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8+10} = \frac{y}{-15+16} = \frac{1}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ और } y = 1$$

अतः हल है: $x = 2, y = 1$

उत्तर

सत्यापन— $x = 2$ और $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि दोनों ही समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$2x + y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$3x + 2y = 3(2) + 2(1) = 6 + 2 = 8$$

अतः प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 12. 'k' के किस मान के लिए निम्न रेखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे—

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0.$$

हल : $kx + 3y - (k - 3) = 0$

$$12x + ky - k = 0$$

यहाँ $a_1 = k, b_1 = 3, c_1 = -(k - 3)$

$$a_2 = 12, b_2 = k, c_2 = -k$$

रेखिक समीकरण के अनेक हल के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\text{अतः } \frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$$

तब $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

अब $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

साथ ही $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

$$k^2 = 36$$

$$\Rightarrow 3k = k^2 - 3k$$

$$\Rightarrow k = \pm 6$$

$$\Rightarrow k^2 = 6k$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k = 0$$

$$\Rightarrow k(k - 6) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ या } k = 6$$

अतः k का मान जो प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है $k = 6$ है।

उत्तर

प्रश्न 13. समीकरण युग्म $x + y = 14, x - y = 4$ को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

हल : दिया हुआ रेखिक समीकरण युग्म है :

$$x + y = 14 \quad \dots(1)$$

$$x - y = 4 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से,

$$y = 14 - x \quad \dots(3)$$

16 | नवबोध प्रश्न-बैंक

y के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{aligned} x - (14 - x) &= 4 \\ \Rightarrow x - 14 + x &= 4 \\ \Rightarrow 2x - 14 &= 4 \\ \Rightarrow 2x &= 4 + 14 \\ \Rightarrow 2x &= 18 \\ \Rightarrow x &= \frac{18}{2} = 9 \end{aligned}$$

x के इस मान को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = 14 - 9 = 5$$

अतः हल है :

$$x = 9, y = 5$$

उत्तर

सत्यापन— $x = 9$ और $y = 5$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं।
जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$x + y = 9 + 5 = 14$$

$$x - y = 9 - 5 = 4$$

अतः प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 14. $2x + 3y = 11$ और $2x + 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे ' m ' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ विधि से हल कीजिए।

हल : दिए हुए रेखिक समीकरण युग्म हैं—

$$2x + 3y = 11 \quad \dots(1)$$

$$2x + 4y = -24 \quad \dots(2)$$

समी. (2) से,

$$2x = 4y - 24$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y - 24}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2y - 12 \quad \dots(3)$$

x के इस मान को समी. (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$2(2y - 12) + 3y = 11$$

$$\Rightarrow 4y - 24 + 3y = 11$$

$$\Rightarrow 7y - 24 = 11$$

$$\Rightarrow 7y = 11 + 24$$

$$\Rightarrow 7y = 35$$

$$\Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

y के इस मान को समी. (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$x = 2(5) - 12 = 10 - 12 = -2$$

अतः हल है :

$$x = -2, y = 5.$$

उत्तर

सत्यापन— $x = -2$ और $y = 5$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं। जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$2x + 3y = 2(-2) + 3(5) = -4 + 15 = 11$$

$$2x - 4y = 2(-2) - 4(5) = -4 - 20 = -24$$

अतः प्राप्त हल सही है।

$$\text{अब, } y = mx + 3$$

$$\Rightarrow 5 = m(-2) + 3$$

$$\Rightarrow 2m = 3 - 5$$

$$\Rightarrow 2m = -2$$

$$\Rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

अतः m का अभीष्ट मान -1 है।

उत्तर

प्रश्न 15. दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण x° तथा छोटा कोण y° है। तब, बना रेखिक समीकरण युग्म हैं :

$$x^\circ = y^\circ + 18^\circ \quad \dots(1)$$

$$x^\circ + y^\circ = 180^\circ,$$

[\because सम्पूरक कोणों का योग 180° होता है।] $\dots(2)$

समी. (1) से x° के मान को समी. (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^\circ + 18^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2y^\circ + 18^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2y^\circ = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$$

$$\Rightarrow y^\circ = \frac{162^\circ}{2} = 81^\circ$$

y° के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^\circ = 81^\circ + 18^\circ = 99^\circ$$

अतः बड़ा कोण 99° और छोटा कोण 81° हैं।

उत्तर

सत्यापन— $x^\circ = 99^\circ$ और $y^\circ = 81^\circ$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं। जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$y^\circ + 18^\circ = 81^\circ + 18^\circ = 99^\circ = x^\circ$$

$$x^\circ + y^\circ = 81^\circ + 18^\circ = 99^\circ$$

अतः प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 16. एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदे ₹ 3800 में खरीदीं। बाद में उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदे ₹ 1750 में खरीदीं। प्रत्येक बल्ले और प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना एक बल्ले का मूल्य x रु. तथा एक गेंद का मूल्य y रु. है। तब, बना रैखिक समीकरण युग्म है—

$$7x + 6y = 3800 \quad \dots(1)$$

$$3x + 5y = 1750 \quad \dots(2)$$

समी. (2) से,

$$5y = 1750 - 3x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1750 - 3x}{5} \quad \dots(3)$$

y के इस मान को समी. (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं—

$$7x + 6\left(\frac{1750 - 3x}{5}\right) = 3800$$

$$\Rightarrow 35x + 10500 - 18x = 19000$$

$$\Rightarrow 17x + 10500 = 19000$$

$$\Rightarrow 17x = 19000 - 10500$$

$$\Rightarrow 17x = 8500$$

$$\Rightarrow x = \frac{8500}{17} = 500$$

x के इस मान को समी. (3) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं—

$$y = \frac{1750 - 3 \times 500}{5}$$

$$= \frac{1750 - 1500}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

अतः, एक बल्ले का मूल्य 500 रु. तथा एक गेंद का मूल्य 50 रु. है।

सत्यापन— $x = 500$ और $y = 50$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समी. (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

$$7x + 6y = 7 \times 500 + 6 \times 50 \\ = 3500 + 300 = 3800$$

$$3x + 5y = 3 \times 500 + 5 \times 50$$

$$= 1500 + 250 = 1750$$

अतः, प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 17. दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी संख्याएँ कितनी हैं ?

हल : माना दो अंकों की संख्या का इकाई का अंक x एवं दहाई का अंक y है।

$$\text{तब संख्या} = x + 10y \text{ होगी।}$$

$$\text{प्रथम शर्त— अंकों को उलटने पर प्राप्त संख्या} = 10x + y$$

अतः प्रश्नानुसार,

$$(x + 10y) + (10x + y) = 66$$

$$11x + 11y = 66$$

$$11(x + y) = 66$$

$$\therefore x + y = 6 \quad \dots(1)$$

$$\text{द्वितीय शर्त— } x - y = 2 \quad \dots(2)$$

अब समी. (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$x + y = 6$$

$$x - y = 2$$

$$\hline 2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ का मान समी. (1) में रखने पर,

$$4 + y = 6$$

$$y = 2$$

अतः संख्या 24 या 42 होगी। ऐसी संख्याओं की संख्या = 2 होगी।

प्रश्न 18. p के किन मानों के लिए, निम्न समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है—

$$4x + py + 8 = 0$$

$$\text{और } 2x + 2y + 2 = 0.$$

हल : दिया हुआ रैखिक समीकरण युग्म है—

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

$$\text{यहाँ } a_1 = 4, b_1 = p, c_1 = 8$$

$$a_2 = 2, b_2 = 2, c_2 = 2$$

अद्वितीय हल के लिए $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2} \Rightarrow p \neq 4.$$

उत्तर

प्रश्न 19. k के किन मानों के लिए निम्न समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है—

$$3x + y = 1$$

$$\text{और } (2k-1)x + (k-1)y = 2k+1.$$

हल : दिया हुआ रेखिक समीकरण युग्म है—

$$3x + y = 1 \quad \dots(1)$$

$$(2k-1)x + (k-1)y = 2k+1 \quad \dots(2)$$

यहाँ, $a_1 = 3, b_1 = 1, c_1 = -1$

$$a_2 = 2k-1, b_2 = k-1, c_2 = -(2k+1)$$

कोई हल न होने के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1} \neq \frac{-1}{-(2k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1} \neq \frac{1}{(2k+1)} \quad \dots(3)$$

प्रथम दो पदों से,

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow 3(k-1) = 2k-1$$

$$\Rightarrow 3k-3 = 2k-1$$

$$\Rightarrow 3k-2k = 3-1$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$k = 2$ रखने पर, समी. (3) से हम पाते हैं

$$\frac{3}{2(2)-1} = \frac{1}{2-1} \neq \frac{1}{2(2)+1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \neq \frac{1}{5} \text{ जो सही है।}$$

अतः k का अभीष्ट मान 2 है।

उत्तर

प्रश्न 20. 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य ₹ 50 है, जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य ₹ 46 है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना एक पेंसिल का मूल्य = ₹ x

एक कलम का मूल्य = ₹ y

∴ प्रश्नानुसार,

$$5x + 7y = 50 \quad \dots(1)$$

$$7x + 5y = 46 \quad \dots(2)$$

समी. (1) में 7 तथा समी. (2) में 5 का गुणा करके घटाने पर,

$$35x + 49y = 350$$

$$\underline{35x + 25y = 230}$$

$$24y = 120$$

$$y = \frac{120}{24}$$

$$y = 5$$

$y = 5$ का मान समी. (1) में रखने पर,

$$5x + 7 \times 5 = 50$$

$$5x + 35 = 50$$

$$5x = 50 - 35 = 15$$

$$\therefore x = 3$$

$$x = 3, y = 5.$$

उत्तर

प्रश्न 21. निम्न रेखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए—

$$3x + 4y = 10$$

$$2x - 2y = 2$$

हल : दिया हुआ रेखिक समीकरण युग्म है—

$$3x + 4y = 10 \quad \dots(1)$$

$$2x - 2y = 2 \quad \dots(2)$$

समी. (2) से,

$$2x = 2y + 2 \quad \dots(3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+2}{2} = \frac{2(y+1)}{2} = y+1$$

x के इस मान को समी. (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$3(y+1) + 4y = 10$$

$$\Rightarrow 3y + 3 + 4y = 10$$

$$\Rightarrow 7y + 3 = 10$$

$$\Rightarrow 7y = 10 - 3$$

$$\Rightarrow 7y = 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

y के इस मान को समी. (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$x = 1 + 1 = 2$$

अतः हल है—

$$x = 2, y = 1 \quad \text{उत्तर}$$

सत्यापन— समी. (1) और (2) में $x = 2$ और $y = 1$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि ये दोनों ही समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

$$3x + 4y = 3(2) + 4(1) = 6 + 4 = 10$$

$$2x - 2y = 2(2) - 2(1) = 4 - 2 = 2$$

अतः प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 22. 5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। एक संतरे का मूल्य तथा एक सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना एक संतरे का मूल्य x रुपये एवं एक सेब का मूल्य y रुपये है। तब, शर्तानुसार

$$5x + 3y = 35 \quad \dots(1) \quad \text{हैं।}$$

$$2x + 4y = 28 \quad \dots(2)$$

समी. (1) में 2 का एवं समी. (2) में 5 का गुणा करके घटाने पर,

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = 70 \\ \underline{10x + 20y = 140} \\ 0 - 14y = -70 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{70}{14} = 5$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$y = 5$ का मान समी. (1) में रखने पर,

$$\Rightarrow 5x + 3(5) = 35$$

$$5x + 15 = 35$$

$$5x = 35 - 15$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

अतः 1 संतरे का मूल्य 4 रुपये एवं 1 सेब का मूल्य 5 रुपये

उत्तर

••

अध्याय 4

द्विघात समीकरण [QUADRATIC EQUATIONS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	—	1	—	1 + 1 + 3 = 5 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान हों, तो समीकरण के विविक्तकर का मान होगा—

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

2. समीकरण $x^2 + x - 1 = 0$ के मूलों की प्रकृति होगी—

(a) वास्तविक और समान
(b) वास्तविक और भिन्न
(c) कोई वास्तविक मूल नहीं
(d) इनमें से कोई नहीं।

3. किसी द्विघात समीकरण में चर की अधिकतम घात होती है—

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4.

4. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर होगा—

(a) $D = b^2 - 4ac$

(b) $D = 4ac - b^2$

(c) $D = b^3 - 4ac$

(d) $D = 4ac - b^3$.

5. निम्नलिखित में से किस द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे—

(a) $x^2 + 9x + 4 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(c) $x^2 + x + 2 = 0$ (d) $x^2 + 5x + 8 = 0$

6. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ के मूल होंगे—

(a) $\frac{3}{2}, 2$ (b) $-\frac{3}{2}, -2$

(c) $-\frac{3}{2}, 2$ (d) $\frac{3}{2}, -2$

उत्तर—1. (a), 2. (b), 3. (b), 4. (a), 5. (a), 6. (a).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. एक समीकरण $p(x) = 0$, जहाँ $p(x)$ घात 2 का बहुपद हो, द्विघात समीकरण कहलाती है।
2. किसी द्विघात समीकरण के अधिकतम दो मूल होते हैं।
3. समीकरण $(x-3)(x+4) = 0$ के मूल 3, -4 हैं।
4. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और समान हों, तो उस समीकरण के विविक्तकर का मान होगा।
5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर का सूत्र है $D = \dots$ $b^2 - 4ac$ ।

उत्तर—1. द्विघात, 2. दो, 3. 3, -4, 4. शून्य, 5. $b^2 - 4ac$ ।

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. एक द्विघात समीकरण के एक से अधिक मूल हो सकते हैं।
2. समीकरण $x(x-1) = 0$ के मूल 0 और -1 होंगे।
3. समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूल समान होंगे।
4. $ax + b = 0$ एक द्विघात समीकरण है।

उत्तर—1. असत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में $b^2 - 4ac$ क्या कहलाता है ?
2. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हों, तो उस समीकरण के विविक्तकर का मान कितना होगा ?
3. यदि किसी द्विघात समीकरण के विविक्तकर का मान ऋणात्मक हो, तो उस समीकरण के मूलों की प्रकृति कैसी होगी ?

4. यदि किसी द्विघात समीकरण के विविक्तकर का मान धनात्मक हो, तो उस समीकरण के मूलों की प्रकृति कैसी होगी ?

उत्तर—1. विविक्तकर, 2. शून्य, 3. मूल वास्तविक नहीं होंगे, 4. मूल वास्तविक और भिन्न होंगे।

~~प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$ द्विघात समीकरण है या नहीं।~~

हल : दिया गया समीकरण है—

$$x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 9 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 6. जाँच कीजिए कि समीकरण $(2x-1)(x-3)$

~~$= (x+5)(x-1)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।~~

हल : दिया गया समीकरण है—

$$(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है। उत्तर

~~प्रश्न 7. जाँच कीजिए कि समीकरण $(x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।~~

हल : दिया गया समीकरण है—

$$(x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 14x - 8 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का नहीं है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

उत्तर

टिप्पणी—वस्तुतः यह एक त्रिघात समीकरण है।

~~प्रश्न 8.~~ निम्नलिखित स्थिति को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए—

एक रेलगाड़ी 480 किमी. की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 किमी / प्रति घंटा कम होती तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

हल : माना रेलगाड़ी की समान चाल x किमी/घंटे है।

तब, 480 किमी की दूरी को तय करने में रेलगाड़ी द्वारा लिया गया समय

$$= \frac{480}{x} \text{ घंटे, } \left[\because \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} \right]$$

चाल 8 किमी/घंटे कम होने पर रेलगाड़ी द्वारा 480 किमी की दूरी को तय करने में लिया गया समय

$$= \frac{480}{x-8} \text{ घंटे, } \left[\because \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} \right]$$

दी गई स्थिति के अनुसार,

$$\frac{480}{x-8} = \frac{480}{x} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$

$$\Rightarrow 480 \left(\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x} \right) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x} = \frac{3}{480}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x} = \frac{1}{160}$$

$$\Rightarrow \frac{x - (x-8)}{(x-8)x} = \frac{1}{160}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{(x-8)x} = \frac{1}{160}$$

$$\Rightarrow (x-8)x = 8 \times 160$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 1280$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0$$

अतः रेलगाड़ी की चाल x (किमी प्रति घंटे में) द्विघात समीकरण $x^2 - 8x - 1280 = 0$ को संतुष्ट करती है। उत्तर

~~प्रश्न 9.~~ निम्नलिखित स्थिति को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए—

दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णाकों को ज्ञात करना है।

हल : माना दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x और $x + 1$ है।

तब, उनका गुणनफल = $x(x + 1)$

परन्तु, गुणनफल = 306, (दिया है)

$$\therefore x(x + 1) = 306$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 306$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$$

अतः लघुतर धनात्मक पूर्णांक द्विघात समीकरण $x^2 + x$

$-306 = 0$ को संतुष्ट करता है। उत्तर

~~प्रश्न 10.~~ द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण के दो बराबर मूल हों।

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है—

$$2x^2 + kx + 3 = 0$$

यहाँ, $a = 2$

$$b = k$$

$$c = 3$$

$$\therefore \text{विविक्तकर} = b^2 - 4ac$$

$$= (k)^2 - 4(2)(3)$$

$$= k^2 - 24$$

दो बराबर मूल होने के लिए,

$$\text{विविक्तकर} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 24$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$$

अतः k के अभीष्ट मान $2\sqrt{6}$ और $-2\sqrt{6}$ हैं। उत्तर

~~प्रश्न 11.~~ द्विघात समीकरण $kx(x - 2) + 6 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण के दो बराबर मूल हों।

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है—

$$kx(x - 2) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow kx^2 - 2kx + 6 = 0$$

22 | नवबोध प्रश्न-बैंक

यहाँ, $a = k, b = -2k, c = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \text{विविक्तकर} &= b^2 - 4ac \\ &= (-2k)^2 - 4(k)(6) \\ &= 4k^2 - 24k \end{aligned}$$

दो बराबर मूल होने के लिए,

$$\text{विविक्तकर} = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 24k = 0$$

$$\Rightarrow 4k(k-6) = 0$$

$$\Rightarrow k(k-6) = 0,$$

$$\Rightarrow k = 0, 6$$

यदि $k = 0$ तो दी गई द्विघात समीकरण देती है

$$b = 0$$

जो असम्भव है। अपिच $k = 0$ पर $a = 0$ जबकि एक द्विघात समीकरण के लिए $a \neq 0$ होता है।

$$\therefore k = 0 \text{ अग्राह्य है।}$$

$$\therefore k = 6$$

अतः k का अभीष्ट मान 6 है।

उत्तर

प्रश्न 12. गुणनखण्ड विधि से समीकरण

$$\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

को हल कीजिए।

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है—

$$\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 5(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{या} \quad \sqrt{2}x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2} \quad \text{या} \quad x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2}, -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

अतः द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ के मूल

$-\sqrt{2}$ और $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ हैं।

उत्तर

सत्यापन—(a) मूल $x = -\sqrt{2}$ के लिए,

द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ में $x = -\sqrt{2}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} &= \sqrt{2}(-\sqrt{2})^2 + 7(-\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= 0 \text{ जो सत्य है।} \end{aligned}$$

अतः समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः $x = -\sqrt{2}$ द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ का एक मूल है।

(b) मूल $x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ के लिए,

द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ में $x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} &= \sqrt{2}\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + 7\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) + 5\sqrt{2} \\ &= \frac{25}{\sqrt{2}} - \frac{35}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} = \frac{25 - 35 + 10}{\sqrt{2}} \\ &= 0 \text{ जो सत्य है।} \end{aligned}$$

अतः समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः $x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2}$

$= 0$ का एक मूल है।

प्रश्न 13. गुणनखण्ड विधि से समीकरण

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$$

को हल कीजिए।

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है—

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow x\left(2x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(2x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{या} \quad x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \text{या} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$$

अर्थात् इस मूल की पुनरावृत्ति होती है।

अतः द्विघात समीकरण $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ के मूल $\frac{1}{4}$ और

$\frac{1}{4}$ हैं।

उत्तर

सत्यापन— पुनरावृत्त मूल $x = \frac{1}{4}$ के लिए,

द्विघात समीकरण $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ में $x = \frac{1}{4}$ प्रतिस्थापित

करने पर, हम पाते हैं कि

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$= 0 \text{ जो सत्य है।}$$

अतः समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः $x = \frac{1}{4}$ द्विघात समीकरण $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ का एक

मूल (पुनरावृत्त) है।

प्रश्न 14. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (रुपयों में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : माना उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या x थी।

तब, उस दिन प्रत्येक नग की निर्माण लागत $= (2x + 3)$ रु.

∴ उस दिन की कुल निर्माण लागत $= x(2x + 3)$ रु.

प्रश्नानुसार,

$$x(2x + 3) = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow x(2x + 15) - 6(2x + 15) = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 15)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 15 = 0 \quad \text{या} \quad x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{15}{2} \quad \text{या} \quad x = 6$$

$$\Rightarrow x = -\frac{15}{2}, 6$$

∴ x निर्मित बर्तनों की संख्या है जो ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$$\therefore x = -\frac{15}{2},$$

[अग्राह्य है]

$$\therefore x = 6$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = 2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

अतः उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या 6 थी तथा प्रत्येक नग की लागत 15 रु. थी।

उत्तर

सत्यापन— $x = 6$ के लिए,

द्विघात समीकरण $2x^2 + 3x - 90 = 0$ में $x = 6$ प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$2x^2 + 3x - 90 = 2(6)^2 + 3 \times 6 - 90$$

$$= 72 + 18 - 90$$

$$= 0 \text{ जो सत्य है।}$$

अतः समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः $x = 6$ द्विघात समीकरण $2x^2 + 3x - 90 = 0$ का एक मूल है।

प्रश्न 15. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

दिया गया द्विघात समीकरण है—

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0, \quad (2 \text{ से भाग देने पर})$$

$$\Rightarrow \left\{ x - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} \right) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} \right) \right\}^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow x - \frac{7}{4} = \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} \text{ या } x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ या } x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3, \frac{1}{2}$$

अतः, द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल 3 और $\frac{1}{2}$ हैं।

उत्तर

प्रश्न 16. एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मी. अधिक लंबा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मी. अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना आयताकार खेत की छोटी भुजा x मी है।

तब, आयताकार खेत की बड़ी भुजा $= (x + 30)$ मी

\therefore आयताकार खेत का विकर्ण

$$= \sqrt{(\text{छोटी भुजा की लंबाई})^2 + (\text{बड़ी भुजा की लंबाई})^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (x+30)^2} \text{ मी.}$$

प्रश्नानुसार,

$$= \sqrt{x^2 + (x+30)^2} = x + 60$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम पाते हैं कि

$$x^2 + (x+30)^2 = (x+60)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 60x + 900 = x^2 + 120x + 3600$$

$$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ, $a = 1, b = -60, c = -2700$

द्विघाती सूत्र का उपयोग करने पर, हम पाते हैं कि

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4(1)(-2700)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 10800}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{14400}}{2} = \frac{60 \pm 120}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{60+120}{2}, \frac{60-120}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{180}{2}, -\frac{60}{2}$$

$$\Rightarrow x = 90, -30$$

$\therefore x$ लंबाई है और लंबाई ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore x = -30$ अग्राह्य है।

अतः आयताकार खेत की छोटी और बड़ी भुजाओं की लंबाईयाँ क्रमशः 90 मी और 120 मी है।

उत्तर

प्रश्न 17. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना बड़ी संख्या x है।

तब, प्रश्नानुसार (छोटी संख्या)² = $8x$

$$\Rightarrow \text{छोटी संख्या} = \sqrt{8x}$$

पुनः प्रश्नानुसार

$$x^2 - 8x = 180$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 180 = 0$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ, $a=1, b=-8, c=-180$

द्विघाती सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-180)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 720}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm 28}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8+28}{2}, \frac{8-28}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{2}, -\frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow x = 18, -10$$

$x = -10$ अग्राह्य है, क्योंकि तब छोटी संख्या $= \sqrt{8(-10)}$

$= \sqrt{-80}$ जिसका अस्तित्व नहीं है।

$$\therefore x = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{8x} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = \pm 12$$

अतः, दोनों संख्याएँ या तो 18, 12 हैं अथवा 18, -12 हैं।

उत्तर

प्रश्न 18. दो पानी के नल एक साथ एक हौज को $9\frac{3}{8}$

घंटों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम व्यास वाले नल से 10 घंटे कम समय लेता है। प्रत्येक द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए।

हल : माना कम व्यास वाला नल हौज को भरने में x घण्टे का समय लेता है।

तब, बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में $(x-10)$ घण्टे का समय लेगा।

\therefore कम व्यास वाले नल द्वारा 1 घण्टे में भरा गया हौज

$$= \frac{1}{x}$$

और बड़े व्यास वाले नल द्वारा 1 घण्टे में भरा गया हौज

$$= \frac{1}{x-10}$$

\therefore एकसाथ दोनों नलों के द्वारा 1 घण्टे में भरा गया हौज

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} \right)$$

\therefore एकसाथ दोनों नलों के द्वारा $9\frac{3}{8}$ घण्टों अर्थात् $\frac{75}{8}$

घण्टों में भरा गया हौज

$$= \frac{75}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} \right)$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{75}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75} \Rightarrow \frac{x-10+x}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-10}{x(x-10)} = \frac{8}{75} \Rightarrow \frac{2(x-5)}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{x(x-10)} = \frac{4}{75}$$

$$\Rightarrow 4x(x-10) = 75(x-5)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 40x = 75x - 375$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 115x + 375 = 0$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ, $a=4, b=-115, c=375$

द्विघाती सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-115) \pm \sqrt{(-115)^2 - 4(4)(375)}}{2(4)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{115 \pm \sqrt{13225 - 6000}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{115 \pm \sqrt{7225}}{8} \Rightarrow x = \frac{115 \pm 85}{8}$$

26 | नवबोध प्रश्न-बैंक

$$\Rightarrow x = \frac{115+85}{8}, \frac{115-85}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{200}{8}, \frac{30}{8} \Rightarrow x = 25, \frac{15}{4}$$

यदि $x = \frac{15}{4}$ तब $x-10 = \frac{15}{4} - 10 = -\frac{25}{4}$ जो

ऋणात्मक है जबकि समय ऋणात्मक नहीं हो सकता।

$$\therefore x = \frac{15}{4} \text{ (अग्राह्य है।)}$$

$$\therefore x = 25$$

$$\Rightarrow x-10 = 25-10 = 15$$

अतः कम व्यास वाले नल और बड़े व्यास वाले नल द्वारा हौज के भरने में लिया गया समय क्रमशः 25 घण्टे और 15 घण्टे हैं।

उत्तर

सत्यापन—

$$25-15=10$$

$$\frac{75}{8} \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{15} \right) = \frac{75}{8} \left(\frac{3+5}{75} \right) = 1$$

अतः प्राप्त हल सही है।

प्रश्न 19. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 वर्ग मीटर है। यदि उनके परिमाणों का अंतर 24 मीटर हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना छोटे वर्ग की भुजा x मी है।

तब, छोटे वर्ग का परिमाण = $4x$ मी

\therefore बड़े वर्ग का परिमाण = $(4x+24)$ मी

$$\therefore \text{बड़े वर्ग की भुजा} = \frac{4x+24}{4} \text{ मी}$$

$$= \frac{4(x+6)}{4} \text{ मी}$$

$$= (x+6) \text{ मी}$$

$$\text{छोटे वर्ग का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2 = x^2 \text{ मी}^2$$

$$\text{बड़े वर्ग का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2 = (x+6)^2 \text{ मी}^2$$

प्रश्नानुसार,

$$x^2 + (x+6)^2 = 468$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 12x + 36 = 468$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 12x - 432 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 216 = 0, \quad [2 \text{ से भाग देने पर}]$$

जो x में एक वर्ग समीकरण है।

यहाँ, $a=1, b=6, c=-216$

द्विघाती सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं—

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-216)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+864}}{2} \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{900}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm 30}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6+30}{2}, \frac{-6-30}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{2}, \frac{-36}{2}$$

$$\Rightarrow x = 12, -18$$

$\therefore x$ लम्बाई है जो ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$$\therefore x = -18 \text{ अग्राह्य है।}$$

$$\therefore x = 12$$

$$\Rightarrow x+6 = 12+6 = 18$$

अतः दोनों वर्गों (छोटे और बड़े) की भुजाएँ क्रमशः 12 मी और 18 मी हैं।

उत्तर

सत्यापन—

$$\text{छोटे वर्ग का परिमाण} = 4 \times 12 = 48 \text{ मी}$$

$$\text{बड़े वर्ग का परिमाण} = 4 \times 18 = 72 \text{ मी}$$

$$\text{परिमाणों का अंतर} = 72 - 48 = 24 \text{ मी}$$

पुनः दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग

$$= (12)^2 + (18)^2$$

$$= 144 + 324 = 468 \text{ वर्ग मी}$$

अतः प्राप्त हल सही है।

अध्याय 5

समान्तर श्रेढियाँ [ARITHMETIC PROGRESSIONS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	1	—	1 + 1 + 2 + 3 = 7 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. A.P. : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ के लिए प्रथम पद एवं सार्वान्तर क्रमशः हैं—

(a) $\frac{3}{2}, -1$ (b) $-\frac{3}{2}, 1$

(c) $-\frac{3}{2}, -1$ (d) $\frac{3}{2}, 1$

2. A.P. : 10, 7, 4, का 30 वाँ पद है—

(a) 97 (b) 77
(c) -77 (d) -87

3. A.P. : $-3, -\frac{1}{2}, 2, \dots$ का 11 वाँ पद है—

(a) 28 (b) 22
(c) -38 (d) $-48\frac{1}{2}$

4. 3, 6, 9, का कौन-सा पद 27 है—

(a) पाँचवाँ (b) आठवाँ
(c) नवाँ (d) छठवाँ

5. $-5, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \dots$ का 11 वाँ पद है—

(a) -20 (b) 20
(c) -30 (d) 30

उत्तर—1. (a), 2. (c), 3. (b), 4. (c), 5. (b).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. समांतर श्रेढी $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ में सार्वान्तर d है।

2. यदि किसी समांतर श्रेढी का n वाँ पद $3 + 2n$ हो, तब श्रेढी का प्रथम पद होगा।

उत्तर—1. -1, 2. 5.

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. $-2, 2, -2, 2, -2, \dots$ एक समांतर श्रेढी है।

2. यदि a, b, c A.P. में हैं तब $b = \frac{a+c}{2}$ है।

3. श्रेढी 8, 6, 4, का 6वाँ पद -2 है।

उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/ वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. A.P. : 2, 7, 12, के 10वें पद का मान लिखिए।

2. A.P. : 4, 6, 8, 40 में पदों की संख्या बताइए।

उत्तर—1. 47, 2. 19.

प्रश्न 5. A. P. : 21, 18, 15, का कौन-सा पद -81 है ?

हल : माना A.P. : 21, 18, 15, का n वाँ पद -81 है।

प्रथम पद $a = 21$

सार्वान्तर $d = 18 - 21 = -3$

$a_n = n$ वाँ पद = -81

अब $a_n = a + (n-1)d$

$-81 = 21 + (n-1)(-3)$

$$-81 - 21 = (n-1)(-3)$$

$$-102 = (n-1)(-3)$$

$$\frac{-102}{-3} = n-1$$

$$34 = n-1$$

$$n = 34 + 1 = 35$$

$$n = 35.$$

अतः A.P. का 35 वाँ पद - 81 होगा।

उत्तर

प्रश्न 6. क्या संख्याओं की सूची 5, 11, 17, 23,

का कोई पद 301 है? क्यों?

हल : प्रथम पद $a = 5$

सार्वन्तर $d = 11 - 5 = 6, 17 - 11 = 6, 23 - 17 = 6$

अतः संख्याओं की सूची A.P. में है।

माना A.P. का n वाँ पद $a_n = 301$ है।

$$\text{तब, } a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 301 = 5 + (n-1)6$$

$$\Rightarrow 301 - 5 = (n-1)6$$

$$\Rightarrow 296 = (n-1)6$$

$$\Rightarrow \frac{296}{6} = n-1$$

$$\Rightarrow n = \frac{296}{6} + 1$$

$$\therefore n = 49.3 + 1 = 50.3 \text{ (असम्भव है)}$$

अतः $n = 50.3$ असंभव है, क्योंकि n (पदों की संख्या) एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए।

अतः 301 संख्याओं की दी गई सूची का पद नहीं है। उत्तर
प्रश्न 7. A. P. : 3, 8, 13, 18, का कौन-सा पद 78 है?

हल : दी गई A. P. है : 3, 8, 13, 18, ...

यहाँ,

$$a = 3$$

$$d = 8 - 3 = 5$$

माना A.P. का n वाँ पद 78 है। तब,

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 78 = 3 + (n-1)5$$

$$\Rightarrow (n-1)5 = 78 - 3$$

$$\Rightarrow (n-1)5 = 75$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{75}{5}$$

$$\Rightarrow n-1 = 15$$

$$\Rightarrow n = 15 + 1 = 16$$

अतः A. P. का 16 वाँ पद 78 है।

उत्तर

प्रश्न 8. समांतर श्रेणी 7, 13, 19,, 205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई A.P. है : 7, 13, 19,, 205

यहाँ,

$$a = 7$$

$$d = 13 - 7 = 6$$

माना समांतर श्रेणी में n पद हैं। तब,

$$a_n = 205$$

$$\Rightarrow a + (n-1)d = 205$$

$$\Rightarrow 7 + (n-1)6 = 205$$

$$\Rightarrow (n-1)6 = 205 - 7$$

$$\Rightarrow (n-1)6 = 198$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{198}{6}$$

$$\Rightarrow n-1 = 33$$

$$\Rightarrow n = 33 + 1$$

$$\Rightarrow n = 34$$

अतः समांतर श्रेणी में 34 पद हैं।

उत्तर

प्रश्न 9. क्या A. P. : 11, 8, 5, 2, का एक पद - 150 है? क्यों?

हल : दी गई A.P. है— 11, 8, 5, 2, ...

यहाँ,

$$a = 11; d = 8 - 11 = -3$$

माना A.P. का n वाँ पद -150 है। तब,

$$a_n = -150$$

$$a + (n-1)d = -150$$

$$\Rightarrow 11 + (n-1)(-3) = -150$$

$$\Rightarrow (n-1)(-3) = -150 - 11$$

$$\Rightarrow (n-1)(-3) = -161$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{-161}{-3}$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{161}{3}$$

$$\Rightarrow n = \frac{161}{3} + 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{164}{3}$$

जो एक प्राकृतिक संख्या नहीं है।

अतः दी गई -150 A. P. का एक पद नहीं है। उत्तर

प्रश्न 10. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं ?

हल : 3 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याएँ इस प्रकार हैं—

$$12, 15, 18, \dots, 99$$

यहाँ, $a = 12, d = 15 - 12 = 3, a_n = 99$

अब $a_n = a + (n-1)d$

$$99 = 12 + (n-1)3$$

$$99 - 12 = (n-1)3$$

$$87 = (n-1)3$$

$$\Rightarrow \frac{87}{3} = n-1$$

$$\Rightarrow 29 = n-1$$

$$\Rightarrow n = 29 + 1 = 30$$

अतः 3 से विभाज्य दो अंकों वाली संख्याएँ 30 हैं। उत्तर

प्रश्न 11. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं ?

हल : तीन अंकों वाली संख्याएँ जो 7 से विभाज्य हैं। इस प्रकार हैं—

$$105, 112, 119, 126, \dots, 994$$

यहाँ, $a = \text{प्रथम पद} = 105$

$$d = \text{सार्वन्तर} = 112 - 105 = 7$$

$$a_n = 994$$

तब, $a_n = a + (n-1)d$

$$\Rightarrow 994 = 105 + (n-1)7$$

$$\Rightarrow 994 - 105 = (n-1)7$$

$$\Rightarrow 889 = (n-1)7$$

$$\Rightarrow \frac{889}{7} = n-1$$

$$\Rightarrow 127 + 1 = n$$

$$\Rightarrow n = 128$$

अतः 7 से विभाज्य तीन अंकों वाली संख्याएँ 128 हैं। उत्तर
प्रश्न 12. वह A. P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 और 7 वाँ पद 9 है।

हल : माना A. P. का प्रथम पद a और सार्वन्तर d है।

तब $a_3 = 5$

$$\Rightarrow a + 2d = 5 \quad \dots(1)$$

एवं $a_7 = 9$

$$\Rightarrow a + 6d = 9 \quad \dots(2)$$

समी. (1) में समी. (2) को घटाने पर,

$$a + 2d = 5$$

$$\underline{a + 6d = 9}$$

$$-4d = -4$$

$$d = 1$$

d का मान समी. (1) में रखने पर,

$$a + 2 \times 1 = 5$$

$$\Rightarrow a = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore a = 3$$

अब A.P. : $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$

$$\Rightarrow 3, 4, 5, 6, \dots \text{ होगी।}$$

उत्तर

प्रश्न 13. A.P. : $10, 7, 4, \dots, -62$ का अंतिम पद से (प्रथम पद की ओर) 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : A.P. को अंत से प्रथम पद की ओर लिखने पर,

$$-62, \dots, 4, 7, 10$$

तब प्रथम पद $a = -62$

सार्वन्तर $d = 7 - 4 = 3, n = 11$

तब $a_n = a + (n-1)d$ से,

$$a_{11} = -62 + (11-1)3$$

$$a_{11} = -62 + 10 \times 3$$

$$= -62 + 30$$

$$= -32.$$

उत्तर

प्रश्न 14. फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 गुलाब के पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 गुलाब के पौधे इत्यादि हैं। उसकी अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे हैं। इस क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं ?

हल : पहली, दूसरी,, अंतिम पंक्तियों में गुलाब के पौधों की संख्या क्रमशः इस प्रकार है—

23, 21, 19,, 5 जो कि एक A. P. है।

माना पंक्तियों की संख्या n है।

तब $a = 23, d = 21 - 23 = -2, a_n = 5$

अब $a_n = a + (n-1)d$

$$5 = 23 + (n-1)(-2)$$

$$5 - 23 = (n-1)(-2)$$

$$\frac{-18}{-2} = n-1$$

$$9 = n-1$$

$$9+1 = n$$

$$n = 10.$$

अतः क्यारी में कुल 10 पंक्तियाँ हैं। उत्तर

प्रश्न 15. उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

हल : माना A. P. का प्रथम पद a और सार्वान्तर d है। तब,

$$11 \text{ वाँ पद} = 38, \quad [\text{दिया है}]$$

$$\Rightarrow a_{11} = 38$$

$$\Rightarrow a + (11-1)d = 38, \quad [\because a_n = a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow a + 10d = 38 \quad \dots(1)$$

$$\text{और, } 16 \text{ वाँ पद} = 73, \quad [\text{दिया है}]$$

$$\Rightarrow a_{16} = 73$$

$$\Rightarrow a + (16-1)d = 73, \quad [\because a_n = a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow a + 15d = 73 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) और समीकरण (2) को हल करने पर, हम पाते हैं :

$$a = -32$$

$$d = 7$$

$$\therefore \text{A. P. का 31वाँ पद} = a_{31}$$

$$= a + (31-1)d, \quad [\because a_n = a + (n-1)d]$$

$$= a + 30d$$

$$= -32 + 30 \times 7$$

$$= -32 + 210 = 178$$

अतः A. P. का 31वाँ पद 178 है। उत्तर

प्रश्न 16. A. P. : 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा ?

हल : दी गई A. P. है :

$$3, 15, 27, 39, \dots$$

यहाँ,

$$a = 3$$

$$d = 15 - 3 = 12$$

माना A. P. का n वाँ पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा। तब,

$$a_n = a_{54} + 132$$

$$= a + (n-1)d$$

$$= a + (54-1)d + 132,$$

$$[\because a_n = a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow a + (n-1)d = a + 53d + 132$$

$$\Rightarrow (n-1)d = 53d + 132$$

$$\Rightarrow (n-54)d = 132$$

$$\Rightarrow (n-54)(12) = 132$$

$$\Rightarrow n-54 = \frac{132}{12}$$

$$\Rightarrow n-54 = 11$$

$$\Rightarrow n = 54 + 11 = 65$$

अतः A. P. का 65 वाँ पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा। उत्तर

प्रश्न 17. वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद, 5 वें पद से 12 अधिक है।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a

सार्वान्तर $= d$ है।

तब प्रश्नानुसार,

$$a_3 = a + 2d = 16 \quad \dots(1)$$

$$a_7 = a_5 + 12$$

$$\Rightarrow a + 6d = (a + 4d) + 12$$

$$\Rightarrow 6d - 4d = 12$$

$$\Rightarrow 2d = 12$$

$$\Rightarrow d = 6$$

d का मान समी. (1) में रखने पर,

$$a + 2 \times 6 = 16$$

$$a + 12 = 16$$

$$a = 16 - 12 = 4$$

अतः अभीष्ट A.P. 4, 10, 16, 22, होगी। उत्तर

प्रश्न 18. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं ?

हल : 10 और 250 के बीच में 4 के गुणजों से बनी श्रेणी 12, 16, 20, 24 248 है, यहाँ $a = 12$, $d = 4$, $a_n = 248$

अब $a_n = a + (n-1)d$

$$248 = 12 + (n-1)4$$

$$248 - 12 = (n-1)4$$

$$236 = (n-1)4$$

$$n-1 = \frac{236}{4} = 59$$

$$n = 59 + 1 = 60$$

अतः 4 के 60 गुणज हैं। उत्तर

प्रश्न 19. यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य है ?

हल : माना A. P. का प्रथम पद a और सार्वान्तर d है। तब,

तीसरा पद = 4, [दिया है]

$$\Rightarrow a_3 = 4$$

$$\Rightarrow a + (3-1)d = 4, \quad [\because a_n = a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow a + 2d = 4 \quad \dots(1)$$

और 9वाँ पद = -8

$$\Rightarrow a_9 = -8$$

$$\Rightarrow a + (9-1)d = -8$$

$$\Rightarrow a + 8d = -8 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) और समीकरण (2) को हल करने पर, हम पाते हैं :

$$\begin{cases} a = 8 \\ d = -2 \end{cases}$$

माना A. P. का n वाँ पद शून्य होगा

तब,

$$a_n = 0$$

$$\Rightarrow a + (n-1)d = 0$$

$$\Rightarrow 8 + (n-1)(-2) = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)2 = 8$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow n-1 = 4$$

$$\Rightarrow n = 4 + 1 = 5$$

अतः A. P. का 5वाँ पद शून्य होगा। उत्तर

प्रश्न 20. a , b एवं c के मान ज्ञात कीजिए जिसमें कि a , 7 , b , 23 और c एक A.P. में हों।

हल : दिया है— a , 7 , b , 23 , c A. P. में है।

अब a , 7 , b A. P. में है,

तब $7 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 14 \quad \dots(1)$

इसी प्रकार, b , 23 , c A. P. में हैं,

तब $23 = \frac{b+c}{2} \Rightarrow b+c = 46 \quad \dots(2)$

7 , b , 23 A. P. में हैं,

तब $b = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$$\Rightarrow b = 15$$

समी. (1) से,

$$a + 15 = 14 \Rightarrow a = -1$$

समी. (2) से,

$$15 + c = 46 \Rightarrow c = 31$$

अतः $a = -1, b = 15, c = 31$.

उत्तर



अध्याय 6

त्रिभुज [TRIANGLES]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	1	—	1 + 1 + 2 + 3 = 7 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

इस कथन को निम्नलिखित नाम से जाना जाता है—

- आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय
- पाइथागोरस प्रमेय
- RHS प्रमेय
- इनमें से कोई नहीं।

- $\triangle ABC$ में, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm है। तब $\angle B$ का मान होगा—

- 120°
- 60°
- 90°
- 45°

- किसी $\triangle ABC$ में, $DE \parallel AB$ तथा $CD = 3$ cm, $EC = 4$ cm, $BE = 6$ cm, तब DA होगा—

- 7.5 cm
- 3 cm
- 4.5 cm
- 6 cm.

- यदि एक त्रिभुज में किसी एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हों, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण होगा—

- 90°
- 60°
- 180°
- 45°

- किसी त्रिभुज ABC में, $DE \parallel BC$ है। $AD = x$, $DB = (x - 2)$, $AE = (x + 2)$ तथा $EC = (x - 1)$

तब x का मान होगा—

- 5
- 4
- 3
- 2.

उत्तर—1. (a), 2. (c), 3. (c), 4. (a), 5. (b).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

- सभी वृत्तहोते हैं। (सर्वांगसम / समरूप)
- सभी वर्ग होते हैं। (सर्वांगसम / समरूप)
- सभी त्रिभुज समरूप होते हैं।
(समद्विबाहु / समबाहु)
- दो समान कोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव होता है। (समान / असमान)
- यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के होती है।
(समान्तर / असमान्तर)

उत्तर—1. समरूप, 2. समरूप, 3. समबाहु, 4. समान, 5. समान्तर

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

- दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसीलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।
- यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के अन्तर के बराबर होता है।
- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

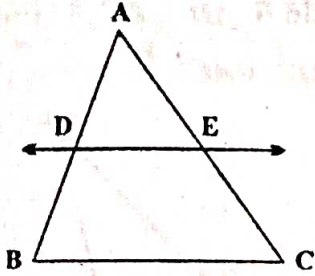
उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/ वाक्य में उत्तर दीजिए—

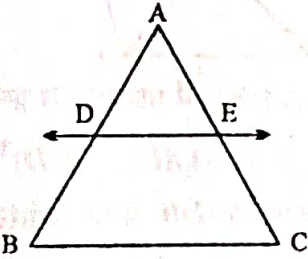
- क्या सभी समद्विबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं ?
- क्या सभी वर्ग समरूप होते हैं ?

उत्तर—1. नहीं, 2. हाँ।

प्रश्न 5. यदि कोई रेखा एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समान्तर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा।



हल : $DE \parallel BC$ (दिया है)



अतः $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, (थेल्स प्रमेय से)

अर्थात् $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

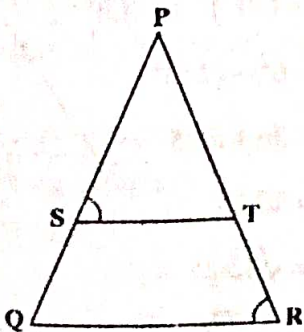
या $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$, (दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)

$\Rightarrow \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

या $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 6. आकृति में, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल : दिया है— $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

अतः $ST \parallel QR$, (थेल्स प्रमेय के विलोम से)

$\therefore \angle PST = \angle PQR$, (संगत कोण) ... (1)

परंतु $\angle PST = \angle PRQ$, (दिया है) ... (2)

इसलिए समी. (1) एवं (2) से,

$$\angle PQR = \angle PRQ$$

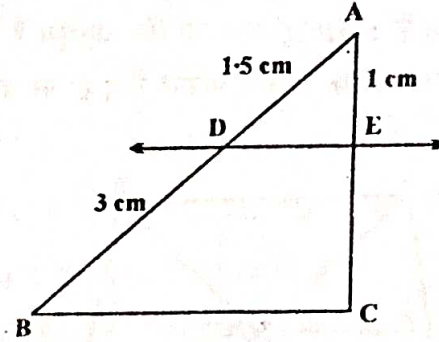
$\Rightarrow PQ = PR$,

(समान कोण की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।)

अतः ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 7. आकृति में $DE \parallel BC$ है। EC ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में,

$$DE \parallel BC$$

तब थेल्स के प्रमेय से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

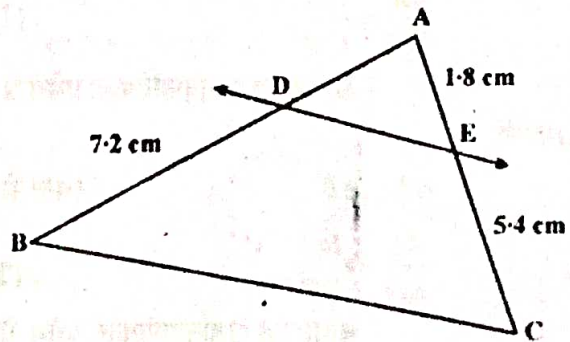
$$\frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC}$$

$\Rightarrow 1.5 \times EC = 3$

$$EC = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2 \text{ cm.}$$

उत्तर

प्रश्न 8. आकृति में $DE \parallel BC$ है। AD ज्ञात कीजिए।



हल : $\triangle ABC$ में,

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

[आधार समानुपातिकता प्रमेय से]

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{7.2 \times 1.8}{5.4}$$

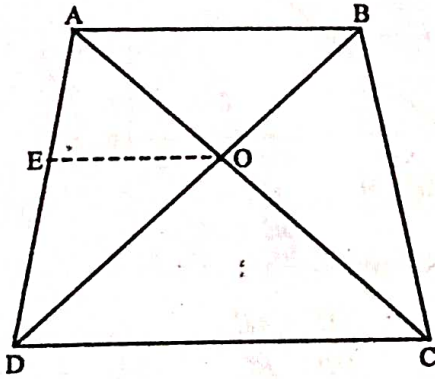
$$\Rightarrow AD = 2.4 \text{ cm.}$$

उत्तर

प्रश्न 9. $ABCD$ एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

हल : दिया है : $ABCD$ एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

रचना : O से होकर AB या DC के समांतर एक रेखा OE खींचिए जो AD को E पर प्रतिच्छेद करती है।

उपपत्ति : $\triangle ADC$ में,

$$\therefore OE \parallel DC, \quad (\text{रचना से})$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}, \quad \dots(1)$$

(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से)

$\triangle ABD$ में,

$$\therefore OE \parallel AB, \quad (\text{रचना से})$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}, \quad \dots(2)$$

(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से)

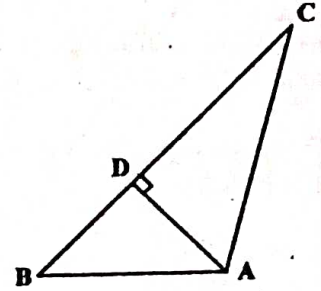
समी. (1) और (2) से,

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 10. आकृति में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।



हल : समकोण $\triangle ADC$ में पाइथागोरस प्रमेय से

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार समकोण $\triangle ADB$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 \quad \dots(2)$$

समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर,

$$(AB)^2 - (AC)^2 = (BD)^2 - (CD)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2.$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 11. एक सीढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी हुई है कि इसका निचला सिरा दीवार से 2.5 मीटर की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 मीटर की ऊँचाई पर बनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना AB सीढ़ी है तथा

AC दीवार है

जिसमें A खिड़की की स्थिति है

एवं $BC = 2.5 \text{ m}, AC = 6 \text{ m}$

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

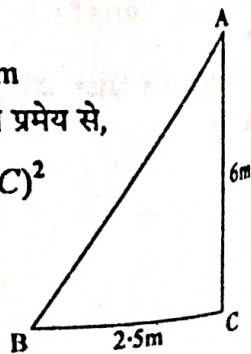
$$\Rightarrow (AB)^2 = 6^2 + (2.5)^2$$

$$(AB)^2 = 36 + 6.25$$

$$(AB)^2 = 42.25$$

$$AB = \sqrt{42.25}$$

$$AB = 6.5 \text{ m.}$$



उत्तर

प्रश्न 12. 10 मीटर लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 मीटर की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना $PQ = 10$ m लंबी एक सीढ़ी है जो दीवार PQ पर टिकाने पर भूमि से 8 m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की P तक पहुँचती है। R सीढ़ी का निचला सिरा है।

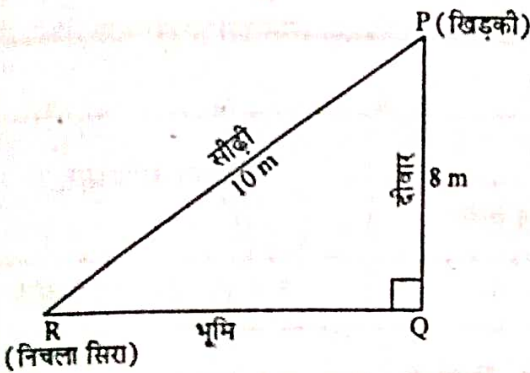
तब,

$$PQ = 8 \text{ m}$$

और

$$PR = 10 \text{ m}$$

$$\angle PQR = 90^\circ$$



समकोण त्रिभुज PQR में,

$$PR^2 = PQ^2 + RQ^2, \text{ (पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow QR^2 = PR^2 - PQ^2$$

$$\Rightarrow QR^2 = (10)^2 - (8)^2$$

$$\Rightarrow QR^2 = 100 - 64$$

$$\Rightarrow QR^2 = 36$$

$$\Rightarrow QR = \sqrt{36}$$

$$\Rightarrow QR = 6 \text{ m}$$

अतः दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी 6 m है।

प्रश्न 13. 18m ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है ?

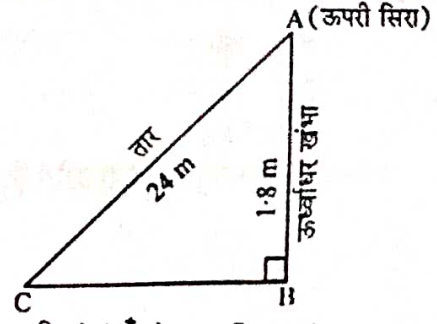
हल : AB एक ऊर्ध्वाधर खंभा है जिसका ऊपरी सिरा A है तथा आधार B है। AC एक तार है।

C एक खूँटा है।

$$AB = 18 \text{ m}$$

$$AC = 24 \text{ m}$$

$$\angle ABC = 90^\circ$$



(दूसरा सिरा) (खूँटा) C आधार

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ (पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = (24)^2 - (18)^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 576 - 324$$

$$\Rightarrow BC^2 = 252$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{252}$$

$$\Rightarrow BC = 6\sqrt{7} \text{ m}$$

अतः खंभे के आधार से खूँटे को $6\sqrt{7}$ m की दूरी पर गाड़ा जाए।

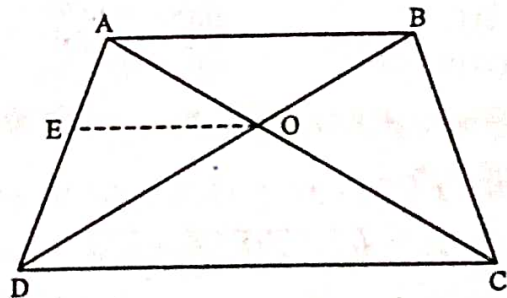
प्रश्न 14. एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर बिन्दु

O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

दर्शाइए कि $ABCD$ एक समलंब चतुर्भुज है।

हल : दिया है— एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर

बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।



सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समलंब है।

रचना : O से होकर AB के समांतर एक रेखा OE खींचिए जो AD को E पर काटती है।

उपपत्ति : $\triangle DBA$ में,

$$\therefore OE \parallel AB, \text{ (रचना से)}$$

$$\therefore \frac{BO}{DO} = \frac{AE}{DE}, \text{ ... (1)}$$

(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से)

$$\text{पुनः, } \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}, \text{ [दिया है]}$$

$$\Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO} \text{ ... (2)}$$

समी. (1) और (2) से,

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AO}{CO}$$

∴ $OE \parallel DC$,

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से]

परंतु

$$OE \parallel AB,$$

$$\therefore AB \parallel DC$$

⇒ ABCD एक समलंब है।

[रचना से]

यही सिद्ध करना था।

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

[COORDINATE GEOMETRY]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	2	—	—	1 + 1 + 2 + 2 = 6 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. मूलबिन्दु के निर्देशांक हैं—

- (a) (x, y) (b) $(x, 0)$
 (c) $(0, y)$ (d) $(0, 0)$ ✓

2. X-अक्ष पर स्थित मूलबिन्दु से 4 इकाई की दूरी पर स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक होंगे—

- (a) $(0, 4)$ (b) $(4, 0)$ ✓
 (c) $(0, -4)$ (d) $(0, 0)$

3. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी होगी—

(a) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ✓

(b) $AB = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(c) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

(d) $AB = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

4. बिन्दु $(8, 6)$ और $(0, 0)$ के बीच की दूरी होगी—

(a) $4\sqrt{2}$ (b) 10 ✓

(c) $\sqrt{10}$ (d) $\sqrt{14}$

5. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ को मिलाने

वाली रेखा के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक होंगे—

(a) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ✓

(b) $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$

(d) $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$

6. बिन्दुओं $A(1, 2)$ और $B(3, 4)$ को मिलाने वाली

रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक होंगे—

(a) $(2, 3)$ (b) $(3, 2)$ ✓

(c) $(0, 0)$ (d) $(4, 4)$

उत्तर—1. (d), 2. (b), 3. (a), 4. (b), 5. (a), 6. (a).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. एक वृत्त के व्यास के सिरों के निर्देशांक $(-3, 4)$ और $(3, -4)$ हैं। तब उसके केन्द्र के निर्देशांक होंगे।

2. बिन्दु $(4, 5)$ चतुर्थांश में स्थित है।

उत्तर—1. $(0, 0)$, 2. प्रथम।

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. किसी बिन्दु का भुज शून्य है और कोटि 3 है। तब वह X -अक्ष पर स्थित होगा।

2. Y -अक्ष पर मूलबिन्दु से 10 इकाई दूरी पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $(10, 0)$ होंगे।

3. बिन्दु $P(x, y)$ की मूलबिन्दु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ होती है।

4. Y -अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ रूप के होते हैं।

उत्तर—1. असत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. बिन्दु $A(3, 4)$ की मूलबिन्दु से दूरी क्या होगी ?

2. बिन्दु $A(-1, 2)$ और $B(3, -4)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक क्या होंगे ?

3. बिन्दुओं $(-3, 4)$ और $(2, 3)$ के बीच की दूरी क्या होगी ?

उत्तर—1. 5, 2. $(1, -1)$ 3. $\sqrt{26}$.

प्रश्न 5. बिन्दुओं $(2, 3)$ और $(4, 1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(2, 3) \rightarrow (x_1, y_1)$

$B(4, 1) \rightarrow (x_2, y_2)$

$$\text{दूरी } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ मात्रक।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. बिन्दुओं $(-5, 7)$ और $(-1, 3)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(-5, 7) = (x_1, y_1)$, $B(-1, 3) = (x_2, y_2)$

$$\text{दूरी } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 + 5)^2 + (3 - 7)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ मात्रक।}$$

उत्तर

प्रश्न 7. बिन्दुओं (a, b) और $(-a, -b)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है— (a, b) , $(-a, -b)$

तब $A(a, b) = (x_1, y_1)$, $B(-a, -b) = (x_2, y_2)$

$$\text{दूरी } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$$

$$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$

$$= \sqrt{4(a^2 + b^2)}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

उत्तर

प्रश्न 8. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(1, -1)$, $(-4, 6)$ और $(-3, -5)$ हैं।

हल : दिया है— $(1, -1)$, $(-4, 6)$, $(-3, -5)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)]$$

$$= \frac{1}{2} [11 + (-4)(-4) + (-3)(-7)]$$

$$= \frac{1}{2}[11+16+21]$$

$$= \frac{1}{2}[48] = 24 \text{ वर्ग इकाई।}$$

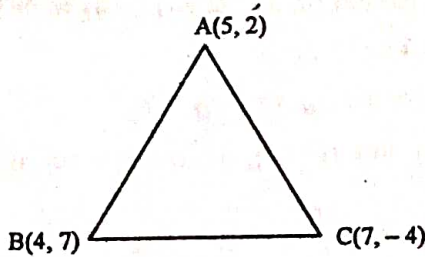
उत्तर

प्रश्न 9. बिंदुओं $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ और $C(7, -4)$ से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(5, 2) = A(x_1, y_1)$

तथा $B(4, 7) = B(x_2, y_2)$

पुनः $C(7, -4) = C(x_3, y_3)$



तब ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[5(7+4) + (4)(-4-2) + (7)(2-7)]$$

$$= \frac{1}{2}[5(11) + 4(-6) + 7(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[55 - 24 - 35]$$

$$= \frac{1}{2}[-4] = -2$$

\therefore क्षेत्रफल = 2 वर्ग मात्रक (क्षेत्रफल ऋणात्मक नहीं होता है, ऋण चिह्न की उपेक्षा करने पर)

उत्तर

प्रश्न 10. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2, 3)$, $(-1, 0)$ और $(2, -4)$ हैं।

हल : दिया है— $(2, 3)$, $(-1, 0)$, $(2, -4)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[2\{0 - (-4)\} + (-1)(-4 - 3) + 2(3 - 0)]$$

$$= \frac{1}{2}(8 + 7 + 6)$$

$$= \frac{21}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 11. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-5, -1)$, $(3, -5)$ और $(5, 2)$ हैं।

हल : दिया है— $(-5, -1)$, $(3, -5)$, $(5, 2)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[(-5)(-5-2) + 3\{2 - (-1)\} + 5\{-1 - (-5)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[35 + 9 + 20]$$

$$= 32 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 12. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु $A(2, 3)$, $B(4, k)$ और $C(6, -3)$ संरेखी हैं।

हल : दिया है— $(2, 3)$, $(4, k)$, $(6, -3)$

संरेख होने के लिए त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2}[2(k+3) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$$

$$\Rightarrow 2k + 6 + 4(-6) + 18 - 6k = 0$$

$$\Rightarrow -4k + 24 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow -4k = 0$$

$$k = 0.$$

उत्तर

प्रश्न 13. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु $(7, -2)$, $(5, 1)$ और $(3, k)$ संरेखी हैं।

हल : दिया है— $(7, -2)$, $(5, 1)$, $(3, k)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} [7(1-k) + 5\{k - (-2)\} + 3(-2-1)]$$

$$= \frac{1}{2} [7-7k+5k+10-9]$$

$$= \frac{1}{2} [-2k+8]$$

$$= -k+4$$

यदि तीनों बिंदु सररेखी हैं, तो

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow -k+4=0$$

$$\Rightarrow k=4.$$

उत्तर

प्रश्न 14. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु $(8, 1)$,

$(k, -4)$ और $(2, -5)$ सररेखी हैं।

हल : दिया है— $(8, 1)$, $(k, -4)$, $(2, -5)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} [8\{-4 - (-5)\} + k\{-5-1\} + 2\{1 - (-4)\}]$$

$$= \frac{1}{2} [8-6k+10]$$

$$= \frac{1}{2} [18-6k] = 9-3k$$

यदि तीनों बिंदु सररेखी हैं, तो

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow 9-3k=0$$

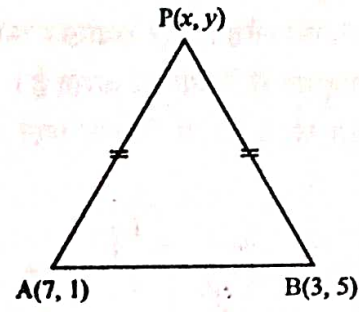
$$\Rightarrow 3k=9$$

$$\Rightarrow k = \frac{9}{3} = 3.$$

उत्तर

प्रश्न 15. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए ताकि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(7, 1)$ और $(3, 5)$ से समदूरस्थ हो।

हल : माना $A(7,1), B(3,5)$ एवं $P(x, y)$ है।



तब

$$PA = PB$$

\Rightarrow

$$(PA)^2 = (PB)^2, \quad (\text{वर्ग करने पर})$$

\Rightarrow

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

\Rightarrow

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

\Rightarrow

$$-14x + 6x - 2y + 10y + 50 - 34 = 0$$

\Rightarrow

$$-8x + 8y + 16 = 0$$

\Rightarrow

$$-8(x-y-2) = 0$$

\Rightarrow

$$x - y - 2 = 0. \quad \text{उत्तर}$$

जो अभीष्ट संबंध है।

प्रश्न 16. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं $(3, 6)$ और $(-3, 4)$ से समदूरस्थ हो।

हल : माना $P \rightarrow (x, y)$

$A \rightarrow (3, 6)$ और $B \rightarrow (-3, 4)$

तब,

$$PA = PB, \quad (\text{दिया है})$$

\Rightarrow

$$PA^2 = PB^2$$

\Rightarrow

$$(3-x)^2 + (6-y)^2 = (-3-x)^2 + (4-y)^2$$

\Rightarrow

$$9 + x^2 - 6x + 36 + y^2 - 12y$$

$$= 9 + x^2 + 6x + 16 + y^2 - 8y$$

\Rightarrow

$$12x + 4y - 20 = 0$$

\Rightarrow

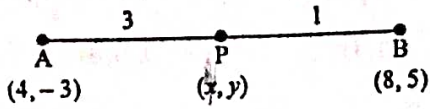
$$3x + y - 5 = 0, \quad (4 \text{ से भाग देने पर})$$

जो अभीष्ट संबंध है।

उत्तर

प्रश्न 17. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (4, -3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल : माना AB को 3 : 1 में विभक्त करने वाला बिन्दु P(x, y) है।



तब $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

$$= \frac{3 \times 8 + 1 \times 4}{3 + 1}, \quad \left(\because m_1 = 3, m_2 = 1 \right)$$

$$= \frac{24 + 4}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

एवं $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$$= \frac{3 \times 5 + 1 \times (-3)}{3 + 1}, \quad \left(\because m_1 = 3, m_2 = 1 \right)$$

$$= \frac{15 - 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$= \frac{15}{5} = 3$$

\therefore बिन्दु $P(x, y) = P(7, 3)$.

उत्तर

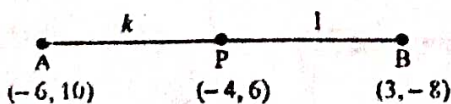
प्रश्न 18. बिंदु (-4, 6) बिन्दुओं A (-6, 10) और B (3, -8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है ?

हल : माना A(-6, 10) एवं B(3, -8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को P(-4, 6), k : 1 अनुपात में विभक्त करता है।

तब $A(-6, 10) = A(x_1, y_1)$

$$B(3, -8) = B(x_2, y_2)$$

$$P(-4, 6) = P(x, y)$$



तब

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$-4 = \frac{3k - 6}{k + 1},$$

$$\left(\because m_1 = k, m_2 = 1 \right)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -6, x_2 = 3 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -4k - 4 = 3k - 6$$

$$\Rightarrow -4k - 3k = -6 + 4$$

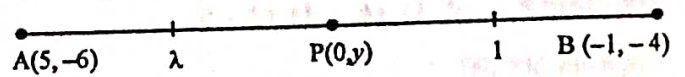
$$\Rightarrow -7k = -2$$

$$\Rightarrow k : 1 = 2 : 7.$$

उत्तर

प्रश्न 19. बिन्दुओं (5, -6) और (-1, -4) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को Y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है ? इस प्रतिच्छेदी बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : AB को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को Y-अक्ष माना $\lambda : 1$ में विभक्त करता है।



तब, AB एवं Y-अक्ष का प्रतिच्छेदी बिन्दु P(0, y) होगा।

$$\therefore 0 = \frac{-\lambda + 5}{\lambda + 1}$$

$$0 = -\lambda + 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

$$\therefore \lambda : 1 = 5 : 1$$

उत्तर

एवं $y = \frac{-4\lambda - 6}{\lambda + 1}$

$$= \frac{-4(5) - 6}{5 + 1}$$

$$= \frac{-20 - 6}{6} = \frac{-26}{6}$$

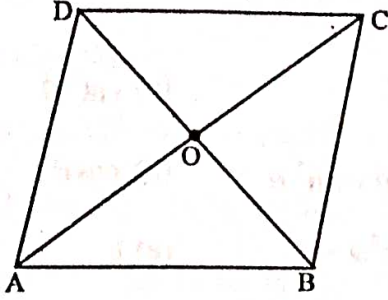
$$= \frac{-13}{3}$$

$$\therefore \text{प्रतिच्छेदी बिन्दु } P(0, y) = P\left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

उत्तर

प्रश्न 20. यदि बिन्दु $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ और $D(P, 3)$ एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



$\therefore AC$ के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

अतः $\frac{8+P}{2} = \frac{15}{2}$, (तुलना करने पर)

$$\Rightarrow 8+P = 15$$

$$\Rightarrow P = 15 - 8 = 7.$$

उत्तर

अध्याय 8

त्रिकोणमिति का परिचय

[INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
6	1	—	—	$1+1+1+1+1+1+2 = 8$ अंक

प्रश्न 1. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'

खण्ड 'ब'

1. $\sin \theta$

(a) $\sqrt{3}$

2. $\sec \theta \cdot \cos \theta$

(b) लंब / कर्ण

3. $\tan 30^\circ$

(c) $1/2$

4. $\cot \theta$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\sec(90 - \theta)$

(e) $\sqrt{\csc^2 \theta - 1}$

(f) $\csc \theta$

उत्तर—1. (b), 2. (c), 3. (d), 4. (e), 5. (f).

प्रश्न 2. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'

खण्ड 'ब'

1. $\operatorname{cosec} 60^\circ$

(a) $1/\sqrt{3}$

2. $\tan(90 - \theta)$

(b) ∞

3. $\sin 48^\circ \sec 42^\circ$

(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

+ $\cos 48^\circ \operatorname{cosec} 42^\circ$

4. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

(d) $\cot \theta$

5. $\tan 90^\circ$

(e) $2\sqrt{3}$

उत्तर—1. (c), 2. (d), 3. (e), 4. (a), 5. (b).

प्रश्न 3. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. $\sec^2 3\theta - \tan^2 3\theta$	(a) $\cot^2 \theta$
2. $2 \tan \theta \cdot \cot \theta$	(b) $\sec \theta$
3. $1 + \tan^2 \theta$	(c) 1
4. $\operatorname{cosec}^2 \theta - 1$	(d) 2
5. $\operatorname{cosec}(90 - \theta)$	(e) $\sec^2 \theta$

उत्तर—1. (c), 2. (d), 3. (e), 4. (a), 5. (b).

प्रश्न 4. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. $1 + \cot^2 \theta$	(a) $\operatorname{cosec} \theta$
2. $\sec \theta$	(b) 0
3. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$	(c) $\sqrt{3}$
4. $\tan 60^\circ$	(d) 1
5. $\sec(90 - \theta)$	(e) $\operatorname{cosec}^2 \theta$
	(f) $\frac{1}{\cos \theta}$
	(g) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

उत्तर—1. (c), 2. (f), 3. (d), 4. (c), 5. (a).

प्रश्न 5. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. $1 + \tan^2 \theta$	(a) $\operatorname{cosec}^2 \theta$
2. $\tan(90 - \theta)$	(b) $\sec^2 \theta$
3. $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $1 + \cot^2 \theta$	(d) $\cot \theta$
5. $\sin 45^\circ$	(e) $\sin \theta$

उत्तर—1. (b), 2. (d), 3. (e), 4. (a), 5. (c).

प्रश्न 6. सही जोड़ी मिलाइए—

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. $\sin 60^\circ$	(a) $\sec^2 \theta$
2. $1 + \tan^2 \theta$	(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{1}{\sec \theta}$	(c) $\cot^2 \theta$
4. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$	(d) $\cos \theta$
5. $\operatorname{cosec}^2 \theta - 1$	(e) 1

उत्तर—1. (b), 2. (a), 3. (d), 4. (e), 5. (c).

प्रश्न 7. मान निकालिए—

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ.$$

$$\text{हल : } \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

उत्तर

प्रश्न 8. मान निकालिए—

$$2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ.$$

$$\text{हल : } 2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$$

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2.$$

उत्तर

प्रश्न 9. दिखाइए कि—

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$

$$\text{हल : } \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= \tan(90^\circ - 42^\circ) \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ)$$

$$= \cot 42^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \cot 23^\circ$$

$$= \frac{1}{\tan 42^\circ} \tan 23^\circ \tan 42^\circ \frac{1}{\tan 23^\circ},$$

$$\left[\because \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \right]$$

= 1. यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 10. दिखाइए कि—

$$\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0.$$

$$\text{हल : } \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \cos 38^\circ \cos(90^\circ - 38^\circ) - \sin 38^\circ \sin(90^\circ - 38^\circ)$$

$$= \cos 38^\circ \sin 38^\circ - \sin 38^\circ \cos 38^\circ,$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \text{और } \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \end{array} \right]$$

= 0. यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 11. यदि $\sin 3A = \cos(A - 26^\circ)$, जहाँ $3A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \sin 3A = \cos(A - 26^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - 3A) = \cos(A - 26^\circ),$$

$$[\because \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)]$$

$$90^\circ - 3A = A - 26^\circ,$$

$$[\because 90^\circ - 3A \text{ और } A - 26^\circ \text{ दोनों न्यूनकोण हैं}]$$

$$90^\circ + 26^\circ = A + 3A$$

$$116^\circ = 4A$$

$$\therefore A = \frac{116^\circ}{4} = 29^\circ. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 12. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$$

$$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ),$$

$$[\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta]$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ,$$

$$[\because 90^\circ - 2A \text{ और } A - 18^\circ \text{ दोनों न्यूनकोण हैं}]$$

$$\Rightarrow 3A = 108^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 13. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ),$$

$$[\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta]$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ,$$

$$[\because 90^\circ - 4A \text{ और } A - 20^\circ \text{ दोनों न्यूनकोण हैं}]$$

$$\Rightarrow 5A = 110^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 14. मान निकालिए—

$$\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$$

$$\text{हल : } \frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2(90^\circ - 27^\circ) + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2(90^\circ - 17^\circ)}$$

$$= \frac{\cos^2 27^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 17^\circ}$$

$$[\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \text{तथा } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{1},$$

$$[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 1.$$

उत्तर

प्रश्न 15. मान निकालिए—

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ.$$

हल : $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

$$= \sin 25^\circ \cos(90^\circ - 25^\circ) + \cos 25^\circ \sin(90^\circ - 25^\circ)$$

$$= \sin 25^\circ \cdot \sin 25^\circ + \cos 25^\circ \cos 25^\circ,$$

$$[\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \text{तथा } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta]$$

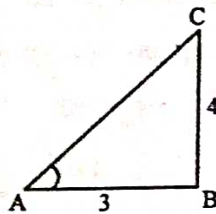
$$= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ, \quad [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 1. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 16. यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ हो, तो $\sin A$ का मान ज्ञात

कीजिए।

हल :



$$\tan A = \frac{4}{3} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$\therefore \Delta ABC$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = 3^2 + 4^2$$

$$(AC)^2 = 9 + 16$$

$$(AC)^2 = 25$$

$$AC = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{अतः } \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}.$$

उत्तर

प्रश्न 17. यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$ हो, तो $\sin \theta$ का मान ज्ञात

कीजिए।

हल : माना कि ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें

$$\angle A = \theta^\circ \text{ और } \angle B = 90^\circ$$

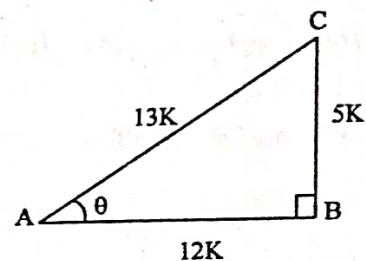
तब, आधार = AB , लंब = BC , और कर्ण = AC

$$\therefore \sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$$

माना $AC = 13K$ और $AB = 12K$

पाइथागोरस प्रमेय से, $AC^2 = AB^2 + BC^2$



$$\begin{aligned} \text{तब, } BC &= \sqrt{AC^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{(13K)^2 - (12K)^2} \\ &= \sqrt{169K^2 - 144K^2} \\ &= \sqrt{25K^2} = 5K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} \\ &= \frac{BC}{AC} = \frac{5K}{13K} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{13}.$$

उत्तर

प्रश्न 18. $\sin A = \frac{3}{4}$ हो, तो $\cos A$ एवं $\tan A$ का

मान परिकलित कीजिए।

हल : $\sin A = \frac{3}{4} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$4^2 = 3^2 + (\text{आधार})^2$$

$$16 - 9 = (\text{आधार})^2$$

$$\sqrt{7} = \text{आधार}$$

अब $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ उत्तर

$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$ उत्तर

प्रश्न 19. यदि $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान परिकलित कीजिए।

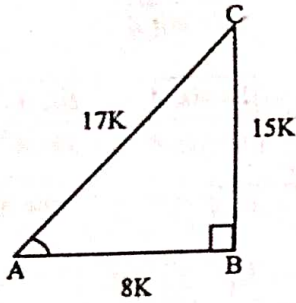
हल : ΔABC में माना $\angle B = 90^\circ$

$\angle A$ के लिए,

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$= \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15}$$

माना $AB = 8K$, $BC = 15K$, (K एक धन पूर्णांक है)



तब $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= 64K^2 + 225K^2$$

$$= 289K^2$$

$$AC = 17K$$

अब $\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$$= \frac{BC}{AC} = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$$
 उत्तर

$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$$= \frac{AC}{AB} = \frac{17K}{8K} = \frac{17}{8}$$
 उत्तर

प्रश्न 20. यदि ΔABC में जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24 \text{ cm}$ और $BC = 7 \text{ cm}$ है, तो $\sin A$ और $\sin C$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना ΔABC में $\angle B = 90^\circ$

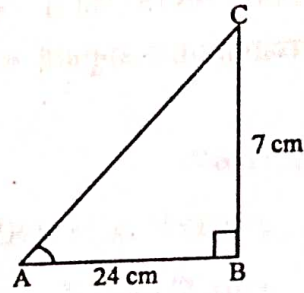
तब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (24)^2 + (7)^2$$

$$= 576 + 49 = 625$$

$\therefore AC = \sqrt{625} = 25$



अब $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ उत्तर

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ उत्तर

प्रश्न 21. $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$ का मान परिकलित कीजिए।

हल : $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ} = \frac{\tan(90^\circ - 25^\circ)}{\cot 25^\circ}$,

$[\because \tan(90 - \theta) = \cot \theta]$

$$= \frac{\cot 25^\circ}{\cot 25^\circ}$$

$= 1$.

उत्तर

प्रश्न 22. $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ का मान परिकलित कीजिए।

हल : $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

$$= \cos(90^\circ - 42^\circ) - \sin 42^\circ$$

$$= \sin 42^\circ - \sin 42^\circ,$$

$[\because \cos(90 - \theta) = \sin \theta]$

$= 0$.

उत्तर

प्रश्न 23. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$.

हल : $\tan A = \cot B$
 $\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$
 $[\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta]$
 $\Rightarrow A = 90^\circ - B$
 $[\because A \text{ और } 90^\circ - B \text{ दोनों न्यूनकोण हैं}]$
 $\Rightarrow A + B = 90^\circ$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 24. $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$
 $= \cot(90^\circ - 5^\circ) + \cos(90^\circ - 15^\circ)$
 $= \tan 5^\circ + \sin 15^\circ$
 $[\because \cot(90 - \theta) = \tan \theta,$
 $\cos(90 - \theta) = \sin \theta]$

उत्तर

प्रश्न 25. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$
 $= \sin(90^\circ - 23^\circ) + \cos(90^\circ - 15^\circ)$
 $[\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta]$
 $= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$ उत्तर

प्रश्न 26. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों, तो दिखाइए कि—

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

हल : L.H.S. = $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right),$$

$$[\because A+B+C = 180^\circ]$$

(त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है)

$$= \sin\left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{A}{2}, \quad \{\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta\}$$

$$= \text{R.H.S.} \quad \text{यही सिद्ध करना था।}$$

प्रश्न 27. सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A.$$

हल : L.H.S. = $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$,

$$= \sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} \times \frac{1 - \sin A}{1 - \sin A}}$$

($\sqrt{1 - \sin A}$ द्वारा गुणा करने व भाग देने पर)

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A - \tan A$$

$$= \text{R.H.S.} \quad \text{यही सिद्ध करना था।}$$

प्रश्न 28. सिद्ध कीजिए— $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$.

हल : L.H.S. = $\frac{1 + \sec A}{\sec A}$

= $\frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$,

$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \right]$

= $\frac{1 + \cos A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$

= $1 + \cos A$

= $(1 + \cos A) \times \frac{(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)}$

= $\frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

= R.H.S. यही सिद्ध करना था।

अध्याय 10

वृत्त

[CIRCLES]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	—	1	—	1 + 1 + 3 = 5 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 सेमी। PQ की लंबाई है—

- (a) 12 सेमी (b) 13 सेमी
(c) 8.5 सेमी (d) $\sqrt{119}$ सेमी।

2. एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 सेमी है तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है—

- (a) 7 सेमी (b) 12 सेमी
(c) 15 सेमी (d) 24.5 सेमी।

3. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है—

- (a) 50° (b) 60°
(c) 70° (d) 80°.

4. यदि TP, TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है—

- (a) 60° (b) 70°
(c) 80° (d) 90°.

उत्तर—1. (d), 2. (a), 3. (a), 4. (b).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

2. वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते हैं।

3. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं।

4. स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर होती है।

उत्तर—1. एक, 2. छेदक रेखा, 3. स्पर्श बिन्दु, 4. लम्ब।

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. वृत्त की दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदक रेखा कहते हैं।
2. वृत्त को एक बिन्दु पर स्पर्श करने वाली रेखा को स्पर्श रेखा कहते हैं।

उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

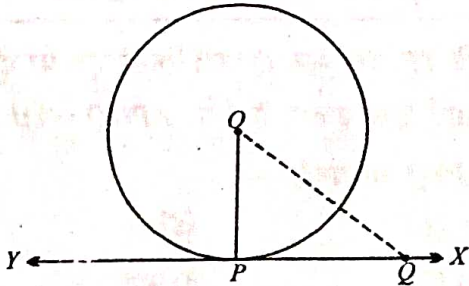
1. वृत्त के दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को क्या कहते हैं ?
2. वृत्त के एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को क्या कहते हैं ?

उत्तर—1. छेदक रेखा, 2. स्पर्श रेखा।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि “वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।”

हल : दिया है— एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा बिन्दु P पर एक स्पर्श रेखा XY है।

सिद्ध करना है— $OP \perp XY$.



रचना - XY पर P के अलावा एक अतिरिक्त बिन्दु Q लेकर O को Q से मिलाया।

उपपत्ति— बिन्दु Q स्पर्श रेखा XY पर स्पर्श बिन्दु P का अतिरिक्त बिन्दु है।

$\therefore Q$ वृत्त के बाहर स्थित होगा—

$$\therefore OQ > OP$$

$$\text{या } OP < OQ$$

किसी बिन्दु O से रेखा XY पर खींचे गए रेखाखण्डों में OP सबसे छोटा है।

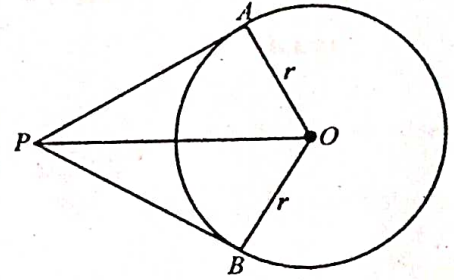
$OP \perp XY$. यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि “बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।”

हल : दिया है— PA और PB बाह्य बिन्दु P से वृत्त $C(O, r)$ पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है— $PA = PB$

रचना—रेखाखण्ड OA , OP और OB खींचे।



उपपत्ति— $\triangle APO$ और $\triangle BPO$ में,

$$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ,$$

(त्रिज्या और स्पर्श रेखा के मध्य समकोण)

$$OP = OP, \quad (\text{उभयनिष्ठ भुजा})$$

$$OA = OB, \quad (\text{वृत्त की त्रिज्या})$$

$$\therefore \triangle APO \cong \triangle BPO$$

$$\Rightarrow PA = PB.$$

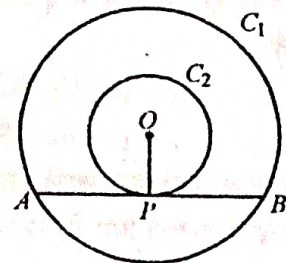
यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि “दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।”

हल : दिया है— दो संकेन्द्रीय वृत्त C_1 एवं C_2 हैं, जिनका केन्द्र O है।

बड़े वृत्त की जीवा AB छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करता है।

सिद्ध करना है— $AP = BP$.



उपपत्ति— रेखाखण्ड \overline{APB} अन्तः वृत्त की स्पर्श रेखा है एवं OP वृत्त की त्रिज्या है।

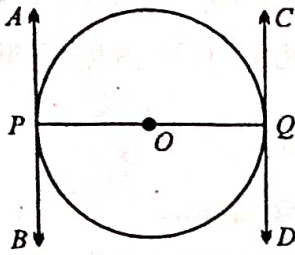
∴ $OP \perp AB$, [त्रिज्या स्पर्श बिन्दु पर लंब होती है]
अब AB बड़े वृत्त की जीवा है।

∴ $AP = PB$, [केन्द्र O से वृत्त की जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है]
यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि, "किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।"

हल : दिया है— एक वृत्त $C(O, r)$ जिसका व्यास PQ है। व्यास के छोर P और Q पर स्पर्श रेखाएँ क्रमशः AB एवं CD खींची गयी हैं।

सिद्ध करना है— $AB \parallel CD$.



उपपत्ति— व्यास PQ केन्द्र O से होकर जाता है। (परिभाषा से)

∴ $\angle APQ = 90^\circ$, [$\because PQ \perp AB$] ... (1)

तथा $\angle DQP = 90^\circ$, [$\because PQ \perp CD$] ... (2)

∴ $\angle APQ = \angle DQP$,

[समी. (1) एवं (2) की तुलना से]

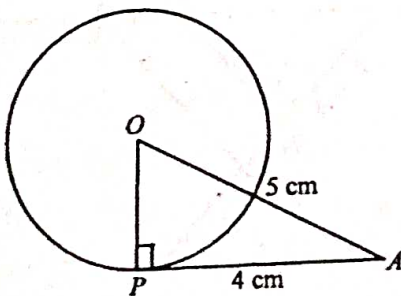
लेकिन ये एकान्तर कोण हैं।

∴ $AB \parallel CD$. यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 9. एक बिंदु A से जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृत्त का केन्द्र O एवं AP वृत्त की स्पर्श रेखा है।

$AP = 4$ सेमी, $OA = 5$ सेमी



ΔOPA में,

$OP \perp AP$

अतः

$\angle OPA = 90^\circ$

∴ $OA^2 = OP^2 + AP^2$,

(पाइथागोरस प्रमेय)

⇒ $(5)^2 = OP^2 + (4)^2$

⇒ $25 = OP^2 + 16$

⇒ $OP^2 = 25 - 16 = 9$

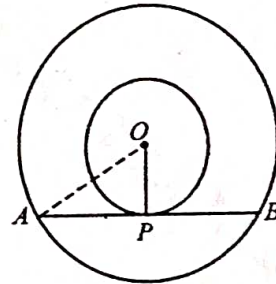
⇒ $OP = \sqrt{9} = 3$ सेमी

अतः वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है।

उत्तर

प्रश्न 10. दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी और 3 सेमी हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल : माना कि O दोनों संकेंद्रीय वृत्तों का केन्द्र है और AB बड़े वृत्त की जीवा है जो छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करती है।



OP को मिलाइए।

चूँकि OP छोटे वृत्त की त्रिज्या है और AB इस वृत्त की P पर स्पर्श रेखा है,

∴ $OP \perp AB$

हम जानते हैं कि वृत्त की किसी भी जीवा से किसी वृत्त के केन्द्र से खींचा जाने वाला लंब जीवा को प्रतिच्छेद करता है।

अतः $OP \perp AB$ और $AP = BP$

समलंब ΔAPO में, हमारे पास है

$OA^2 = AP^2 + OP^2$

⇒ $5^2 = AP^2 + 3^2$

⇒ $AP^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

⇒ $AP = \sqrt{16} = 4$

अब, $AB = 2AP$, ($\because AP = BP$)

$= 2 \times 4 = 8$

अतः बड़े वृत्त की जीवा की लंबाई, जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, 8 cm है।

उत्तर



अध्याय 11

रचनाएँ

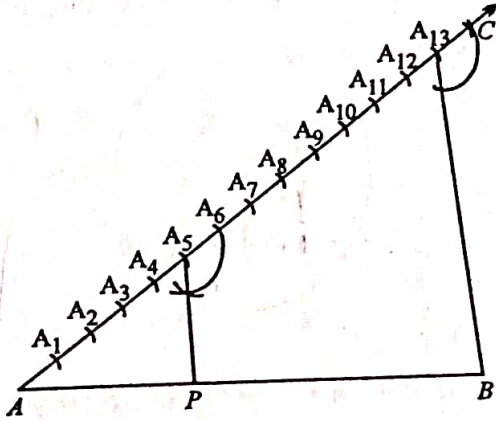
[CONSTRUCTIONS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
—	—	—	1	4 अंक

प्रश्न 1. 7.6cm लंबा एक रेखाखण्ड खींचिए और 5 : 8 अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।

हल : रचना के चरण—



1. $AB = 7.6\text{cm}$ रेखाखण्ड खींचिए।
2. एक किरण AC खींचिए जो AB के साथ कोई भी न्यून कोण बनाए।
3. किरण AC पर A से शुरू कर $5 + 8 = 13$ बराबर रेखाखण्ड चिह्नित करें, इन्हें क्रमशः A_1, A_2, \dots, A_{13} से अंकित करें।
4. $A_{13}B$ को मिलाएँ।
5. A_5 से $A_5P \parallel A_{13}B$ खींचें जो AB को P पर मिले।
6. इस प्रकार P, AB को 5 : 8 के अनुपात में बाँटता है। मापने पर $AP = 2.9\text{cm}$ एवं $PB = 4.7\text{cm}$ होगा (लगभग)।

औचित्य या सत्यापन—

$$\Delta ABA_{13} \text{ में } PA_5 \parallel BA_{13}$$

$$\therefore \Delta APA_5 \sim \Delta ABA_{13}$$

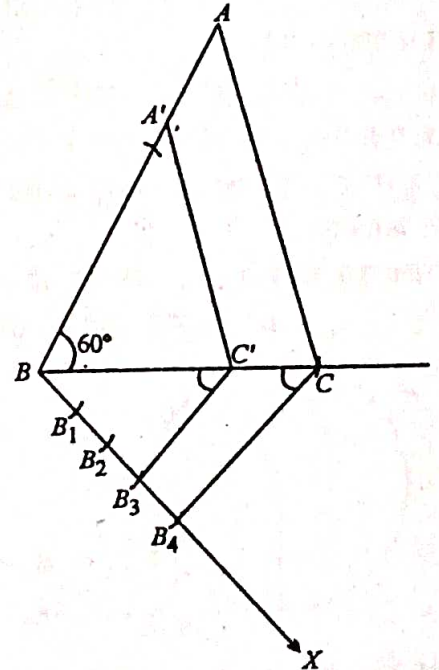
$$\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AA_5}{A_5A_{13}} = \frac{5}{8}$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से]

प्रश्न 2. एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ हों।

हल : रचना के चरण—

1. एक ΔABC बनाइए जिसमें $BC = 6\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ एवं $\angle ABC = 60^\circ$ हो।
2. BC से शीर्ष A से दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।



3. BX के साथ चार बिन्दु B_1, B_2, B_3 एवं B_4 चिह्नित कीजिए

जिससे $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

4. B_4C को मिलाइए।

5. B_3 से $B_3C' \parallel B_4C$ खींचें जो BC को C' पर मिले।

6. $C'A' \parallel CA$ की रचना कीजिए जिससे $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त होता है।

औचित्य या सत्यापन—

ΔABC एवं $\Delta A'BC'$ में,

$$\angle B = 60^\circ, \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle C = \angle C' \quad (\text{रचना से})$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'BC', \quad (AA \text{ समरूपता से})$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{या} \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 3. 4cm, 5cm और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत

भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—

1. 4 cm, 5 cm और 6 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए।

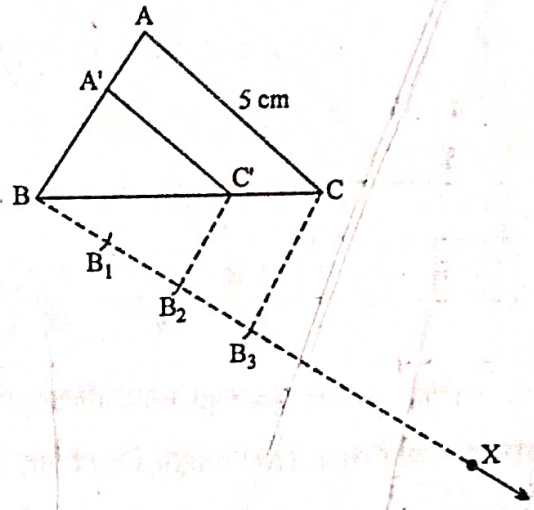
2. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

3. BX पर 3 बिन्दु B_1, B_2 और B_3 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

4. B_3 को C से मिलाइए। B_2 से B_3C के समांतर रेखा B_2C' खींचिए।

5. C' से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा BA को A' पर प्रतिच्छेदित करती हुई खींचिए।

तब, $A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।



औचित्य या सत्यापन—

$$\therefore B_3C \parallel B_2C', \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \frac{BB_2}{B_2B_3} = \frac{BC'}{C'C}$$

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से]

$$\text{परंतु} \quad \frac{BB_2}{B_2B_3} = \frac{2}{1}, \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \frac{BC'}{C'C} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{C'C}{BC'} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{C'C}{BC'} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{C'C + BC'}{BC'} = \frac{1+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{2}{3} \quad \dots(1)$$

$$\therefore CA \parallel C'A', \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \Delta BC'A' \sim \Delta BCA, \quad [AA \text{ समरूपता कसौटी से}]$$

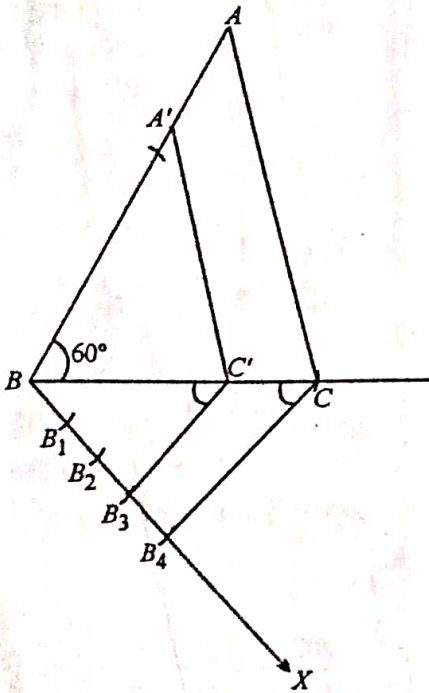
$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \left(= \frac{2}{3} \right),$$

[समी . (1) से आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से]

प्रश्न 4. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 6\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ और $\angle ABC = 60^\circ$ हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—

1. एक ΔABC बनाइए जिसमें $BC = 6\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ एवं $\angle ABC = 60^\circ$ हो।



2. BC से शीर्ष A से दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

3. BX के साथ चार बिन्दु B_1, B_2, B_3 एवं B_4 चिह्नित कीजिए, जिससे $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ।

4. B_4C को मिलाइए।

5. B_3 से $B_3C' \parallel B_4C$ खींचें जो BC को C' पर मिले।

6. $C'A' \parallel CA$ की रचना कीजिए जिससे $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त होता है।

औचित्य या सत्यापन—

ΔABC एवं $\Delta A'BC'$ में,

$$\angle B = 60^\circ, \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle C = \angle C' \quad (\text{रचना से})$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'BC', \quad (AA \text{ समरूपता से})$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{या} \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 5. एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ हों।

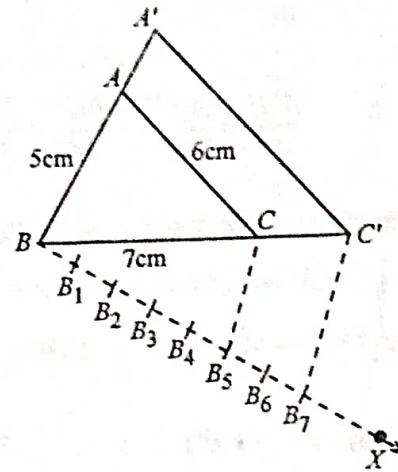
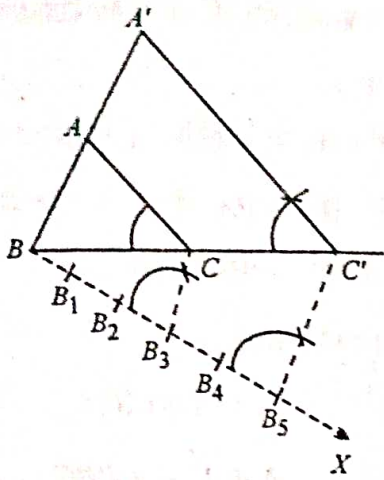
हल : रचना के चरण—

1. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यून कोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

2. 5 बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 BX पर BX पर बराबर दूरी पर अंकित कीजिए।

3. B_3 को C से मिलाइए।

4. B_5 से होकर C से होकर जाने वाली B_3C के समांतर रेखा इस प्रकार खींचिए जो BC को बढ़ाए गए बिन्दु C' पर प्रतिच्छेद करे।



5. C' से होकर CA के समांतर एक रेखा, बढ़ाने पर रेखाखंड BA को A' पर प्रतिच्छेद करे।

6. तब $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है। जो कि $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ है।

$$\text{तब } \frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'} \text{ है।}$$

$$\text{एवं } \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

प्रश्न 6. 5cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—

1. 5cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए।

2. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

3. 7 बिंदु $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ और B_7, BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = B_6B_7.$$

4. B_5 को C से मिलाइए और B_7 से होकर जाने वाली B_5C के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ाए गए रेखाखण्ड BC को C' पर प्रतिच्छेद करे।

5. C' से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ाए गए रेखाखण्ड BA को A' पर प्रतिच्छेदित करे।

तब, $A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

औचित्य या सत्यापन—

$$\therefore C'A' \parallel CA, \quad (\text{रचना द्वारा})$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'BC', \quad (AA \text{ समरूपता कसौटी})$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC},$$

(\therefore दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$$\therefore B_7C' \parallel B_5C, \quad (\text{रचना द्वारा})$$

$$\therefore \Delta BB_7C' \sim \Delta BB_5C, \quad (AA \text{ समरूपता कसौटी})$$

$$\therefore \frac{BC}{BC'} = \frac{BB_5}{BB_7},$$

(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

$$\text{परंतु } \frac{BB_5}{BB_7} = \frac{5}{7}, \quad (\text{रचना द्वारा})$$

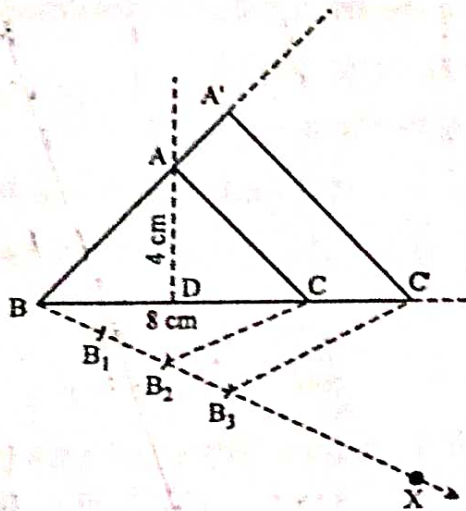
$$\therefore \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$$

$$\therefore \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

प्रश्न 7. आधार 8cm तथा ऊँचाई 4 cm के एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $1\frac{1}{2}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—



1. $BC = 8$ cm खींचिए।
2. BC का लंबार्धक खींचिए जो BC से D पर मिलता है।
3. लंबार्धक पर एक बिन्दु A इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AD = 4$ cm.
4. AB और AC को मिलाइए। तब $\triangle ABC$ अभीष्ट समद्विबाहु त्रिभुज है।
5. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।
6. तीन बिन्दु B_1, B_2 और B_3, BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ हो।

7. B_2 को C से मिलाइए। B_3 से होकर जाने वाली B_2C के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ाए गए रेखाखंड BC को C' पर प्रतिच्छेदित करे।

8. C' से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ाए हुए रेखाखंड BA को A' पर प्रतिच्छेद करे। तब, $\triangle A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

औचित्य या सत्यापन—

$$\therefore C'A' \parallel CA, \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'BC', \quad [AA \text{ समरूपता से}]$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$$

[समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।]

$$\therefore B_2C' \parallel B_2C, \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \triangle BB_2C' \sim \triangle BB_2C, \quad [AA \text{ समरूपता से}]$$

$$\therefore \frac{BC'}{BC} = \frac{BB_2}{BB_1}$$

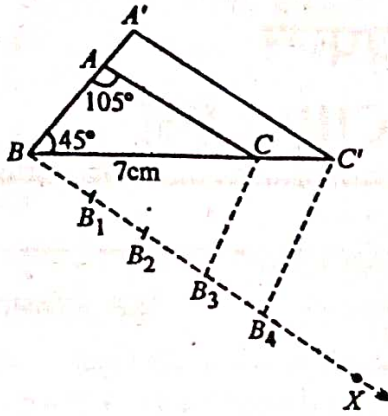
$$\text{परंतु } \frac{BB_2}{BB_1} = \frac{3}{2}, \quad [\text{रचना से}]$$

$$\therefore \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

प्रश्न 8. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 7$ cm, $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ $\triangle ABC$ की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—



1. दिए गए मान से ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 7\text{cm}$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \angle C &= 180^\circ - (\angle A + \angle B) \\ &= 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) \\ &= 180^\circ - 150^\circ \end{aligned}$$

$$\boxed{\angle C = 30^\circ}$$

2. BC के नीचे एक न्यूनकोण $\angle CBX$ बनाइए।
3. BX पर चार बिन्दु चिह्नित कीजिए उन्हें B_1, B_2, B_3, B_4 से नामांकित कीजिए।
- इस तरह $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ।
4. B_3 से C को मिलाएँ।
5. B_4 से $B_4C' \parallel B_3C$ बनाएँ जो बढ़ाए गए BC को C' पर मिलता है।
6. C से $A'C' \parallel AC$ खींचिए जो BA को A' तक बढ़ाकर मिलाएँ।

7. इस प्रकार $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज होगा।

औचित्य या सत्यापन— चूँकि $A'C' \parallel AC$ (रचना से),
 $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = \angle C'$

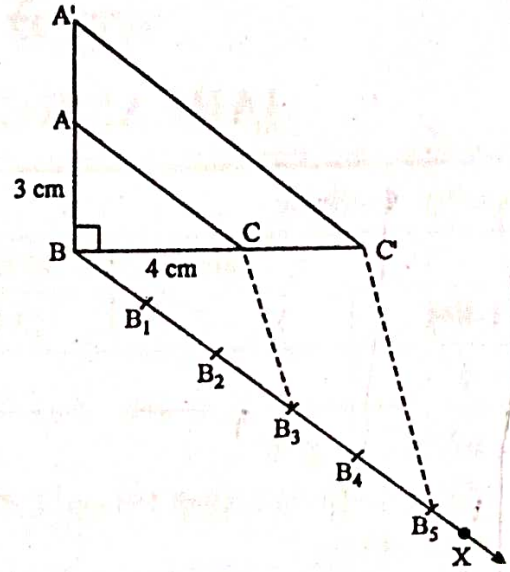
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'BC', \quad (AA \text{ समरूपता से})$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 9. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4cm तथा 3cm लम्बाई की हों। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ

दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हों।

हल : रचना के चरण—



1. एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm और 3 cm लम्बाई की हों।
2. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।
3. पाँच बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4 और B_5 , BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ हो।
4. B_3 को C से मिलाइए। B_5 से होकर जाने वाली B_3C के समांतर एक रेखा खींचें जो बढ़ाए गए रेखाखंड BC को C' पर प्रतिच्छेदित करे।
5. C' से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ाए गए रेखाखंड BA को A' पर प्रतिच्छेदित करे।

तब $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

औचित्य या सत्यापन—

$$\therefore C'A' \parallel CA, \quad [\text{रचना से}]$$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle C = \angle C'$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'BC',$$

[AA समरूपता से]

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

[समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।]

अध्याय 12

वृत्त से संबंधित क्षेत्रफल [AREAS RELATED TO CIRCLES]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	—	—	1 + 1 + 2 = 4 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. यदि किसी वृत्त का क्षेत्रफल 154 cm^2 है तो इसका परिमाण होगा—

(a) 11 cm (b) 22 cm
(c) 44 cm (d) 55 cm.

2. यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं, तो उस वृत्त की त्रिज्या है—

(a) 2 मात्रक (b) π मात्रक
(c) 4 मात्रक (d) 7 मात्रक।

3. त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण P° है, निम्नलिखित है—

(a) $\frac{P}{180^\circ} \times 2\pi R$ (b) $\frac{P}{180^\circ} \times \pi R^2$
(c) $\frac{P}{360^\circ} \times 2\pi R$ (d) $\frac{P}{720^\circ} \times 2\pi R^2$.

उत्तर—1. (c), 2. (a), 3. (d).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. यदि वृत्त का क्षेत्रफल 4π वर्ग सेमी है, तो उसकी त्रिज्या 2 सेमी होगी।

उत्तर—1. 2 सेमी।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए—

1. वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ होती है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
2. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
3. वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}$ होता है,

जहाँ r वृत्त की त्रिज्या तथा θ केन्द्र पर अंतरित कोण है।

उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य, 3. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।
2. वृत्त के त्रिज्यखंड का सूत्र लिखिए।

उत्तर—1. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है, 2. वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}$ होता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या तथा θ केन्द्र पर अंतरित कोण है।

प्रश्न 5. एक वृत्ताकार खेत पर ₹ 24 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ₹ 5280 है। इस खेत की ₹ 0.50 प्रति वर्गमीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए।} \right)$

$$\text{हल : बाड़ की लंबाई} = \frac{\text{पूरा व्यय}}{\text{दर}}$$

$$= \frac{5280}{24} = 220 \text{ मीटर}$$

खेत की परिधि $2\pi r = 220$, ($r =$ खेत की त्रिज्या)

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

$$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35 \text{ मीटर}$$

अब खेत का क्षेत्रफल $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35$

$$= 22 \times 5 \times 35 \text{ m}^2$$

$\therefore 1 \text{ m}^2$ खेत की जुताई का व्यय = ₹ 0.50

अतः खेत की जुताई में कुल व्यय = $0.50 \times 22 \times 5 \times 35$
= ₹ 1925. उत्तर

प्रश्न 6. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19cm और 9cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

हल : माना उस वृत्त की त्रिज्या R है।

$$2\pi R = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$\Rightarrow 2\pi R = 2\pi(r_1 + r_2)$$

$$\Rightarrow R = 19 + 9, (r_1 = 19\text{cm}, r_2 = 9\text{cm})$$

$$\Rightarrow R = 28\text{cm.} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 7. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 6cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल : माना उस वृत्त की त्रिज्या R है।

$$\text{तब} \quad \pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\pi R^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

$$\Rightarrow R^2 = 8^2 + 6^2, (r_1 = 8\text{cm}, r_2 = 6\text{cm})$$

$$= 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 10\text{cm}} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 8. किसी कार के प्रत्येक पहिए का व्यास 80 cm है। यदि यह कार 66 km प्रति घण्टे की चाल से चल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाता है ?

हल : कार के द्वारा 10 मिनट में चली गई दूरी

$$\frac{10}{60} \times 66 = 11\text{km} = 11000\text{m}$$

माना कि कार के प्रत्येक पहिए द्वारा लगाए गए चक्करों की संख्या = n हो तो

$$2\pi r \times n = \text{चली गई दूरी}$$

$$\pi(2r) \times n = \text{चली गई दूरी}$$

$$\pi(\text{व्यास}) \times n = 11000$$

$$\pi \times 80 \times n = 11000$$

$$\text{या} \quad \frac{22}{7} \times 80 \times n = 11000$$

$$n = \frac{7 \times 11000}{22 \times 80}$$

$$n = 4375. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 9. त्रिज्या 4cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4^2, (\theta = 30^\circ, r = 4\text{cm})$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{cm}^2 = 4.19\text{cm}^2$$

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - \text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल}$$

$$= (3.14 \times 4^2 - 4.19)$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19)$$

$$= 46.05\text{cm}^2 \text{ (लगभग)} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 10. 6cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल : $r = 6\text{cm}, \theta = 60^\circ$

$$\text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 36$$

$$= \frac{132}{7} \text{cm}^2. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 11. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22cm है।

हल : माना वृत्त की त्रिज्या r cm है।

तब, वृत्त की परिधि = $2\pi r$ cm

प्रश्नानुसार,

$$2\pi r = 22$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$\Rightarrow r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} \Rightarrow r = \frac{7}{2} \text{cm}$$

\Rightarrow वृत्त के चतुर्थांश के लिए, $\theta = 90^\circ$

\therefore वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{77}{8} \text{cm}^2.$$

उत्तर

प्रश्न 12. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

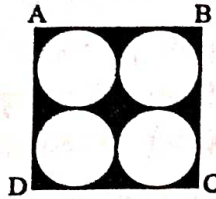
हल : यहाँ, $r = 14\text{cm}$; $\theta = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$

$$\therefore \text{रचित क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= \frac{154}{3} \text{cm}^2.$$

उत्तर

प्रश्न 13. आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है।



हल : वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा

$$= 14 \times 14$$

$$= 196 \text{cm}^2$$

प्रत्येक वृत्त का व्यास = $\frac{14}{2} = 7 \text{cm}$

\therefore प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या = $\frac{7}{2} \text{cm} = r$

एक वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

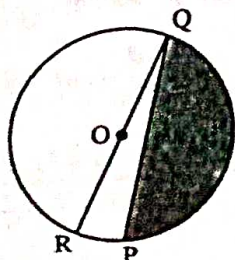
$$= \frac{77}{2} \text{cm}^2$$

अतः चारों वृत्तों का क्षेत्रफल = $4 \times \frac{77}{2} = 154 \text{cm}^2$

\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $(196 - 154) = 42 \text{cm}^2$.

उत्तर

प्रश्न 14. आकृति में, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24 \text{cm}$, $PR = 7 \text{cm}$ तथा O वृत्त का केन्द्र है।



हल : $\angle RPQ = 90^\circ$,
[\because अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।]

$\therefore RQ^2 = PR^2 + PQ^2$,
[पाइथागोरस प्रमेय से]

$$= (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$$

$\Rightarrow RQ = \sqrt{625} = 25$

वृत्त का व्यास = 25 cm

\therefore वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{25}{2} \text{cm}$

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2$

$$= \frac{625}{8} \pi = \frac{625}{8} \times \frac{22}{7}$$

$$= \frac{6875}{28} \text{cm}^2$$

समकोण त्रिभुज RPQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times PQ \times PR = \frac{1}{2} \times 24 \times 7$$

$$= 84 \text{cm}^2$$

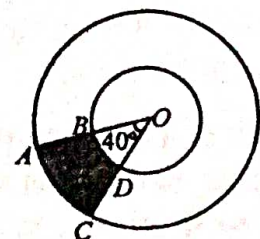
\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल
- समकोण त्रिभुज RPQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{6875}{28} - 84 = \frac{6875 - 2352}{28}$$

$$= \frac{4523}{28} \text{cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{4523}{28} \text{cm}^2$ है। उत्तर

प्रश्न 15. आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों सकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।

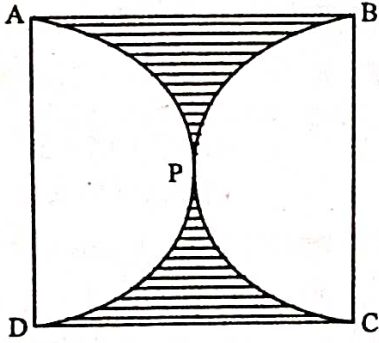


हल : छायांकित भाग का क्षेत्रफल

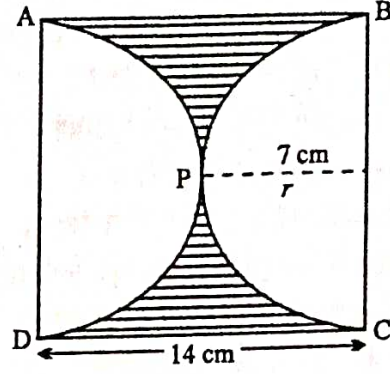
$$\begin{aligned}
 &= \text{त्रिज्यखंड } OAC \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &\quad - \text{त्रिज्यखंड } OBD \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &= \frac{40^\circ}{360^\circ} \pi (14)^2 - \frac{40^\circ}{360^\circ} \pi (7)^2 \\
 &= \frac{40^\circ}{360^\circ} \pi \{(14)^2 - (7)^2\} \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{22}{7} (14-7)(14+7) \\
 &= \frac{154}{3} \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 16. आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $ABCD$ भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।



हल :



$ABCD$ एक वर्ग है।

माना $AB = BC = CD = AD = a = 14 \text{ cm}$

वृत्त का व्यास $2r = 14 \text{ cm}$

$$\therefore \text{त्रिज्या } r = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

स्पष्ट है कि $ar(APD) + ar(BPC)$

$$= \text{वृत्त का क्षेत्रफल } \pi r^2$$

\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \text{वर्ग का क्षेत्रफल} - \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= a^2 - \pi r^2$$

$$= 14^2 - \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2.$$

उत्तर

••

अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

[SURFACE AREAS AND VOLUMES]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	—	—	1	1 + 1 + 4 = 6 अंक

प्रश्न 1. सत्य / असत्य लिखिए—

1. अर्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$ होता है, जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।

2. शंकु का आयतन $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ होता है, जहाँ r आधार की त्रिज्या एवं h शंकु की ऊँचाई है।

उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य।

प्रश्न 2. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र लिखिए।
2. घनाभ के आयतन का सूत्र लिखिए।
3. गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र लिखिए।
4. गोले के आयतन का सूत्र लिखिए।
5. अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का सूत्र लिखिए।
6. अर्द्धगोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र लिखिए।
7. अर्द्धगोले के आयतन का सूत्र लिखिए।
8. बेलन के वक्रपृष्ठ का सूत्र लिखिए।
9. बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र लिखिए।
10. बेलन के आयतन का सूत्र लिखिए।
11. शंकु के वक्रपृष्ठ का सूत्र लिखिए।
12. शंकु के सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र लिखिए।
13. शंकु के आयतन का सूत्र लिखिए।

उत्तर—1. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = $2[lb + bh + hl]$ होता है, जहाँ l, b, h क्रमशः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं, 2. घनाभ का आयतन = lbh होता है, जहाँ l, b, h क्रमशः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं, 3. गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ = $4\pi r^2$ होता है, जहाँ r गोले की त्रिज्या है, 4. गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$ होता है, जहाँ r गोले की त्रिज्या है, 5. अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ = $2\pi r^2$ होता है, जहाँ r अर्द्धगोले की त्रिज्या है, 6. अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ = $3\pi r^2$ होता है, जहाँ r अर्द्धगोले की त्रिज्या है, 7. अर्द्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$ होता है, जहाँ r अर्द्धगोले की त्रिज्या है, 8. बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$ होता है, जहाँ r एवं h क्रमशः बेलन के आधार की त्रिज्या एवं बेलन की ऊँचाई है, 9. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = $2\pi r(r + h)$ होता है, जहाँ r एवं h क्रमशः बेलन के आधार की त्रिज्या एवं बेलन की ऊँचाई है, 10. बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ होता है, जहाँ r एवं h क्रमशः बेलन के आधार की त्रिज्या एवं बेलन की ऊँचाई हैं, 11. शंकु का वक्र पृष्ठ = πrl होता है, जहाँ r एवं l क्रमशः शंकु के आधार की त्रिज्या एवं शंकु की तिर्यक ऊँचाई है, 12. शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ = $\pi r(r + l)$ होता है, जहाँ r एवं l क्रमशः शंकु के आधार की त्रिज्या एवं शंकु की तिर्यक ऊँचाई है, 13. शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ होता है, जहाँ r एवं h क्रमशः शंकु के आधार की त्रिज्या एवं शंकु की ऊँचाई है।

प्रश्न 3. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64cm^3 है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना घन की कोर की लंबाई a cm है।

तब, इसका आयतन = $a^3 \text{cm}^3$

प्रश्नानुसार,

$$a^3 = 64$$

$$\Rightarrow a^3 = 4^3$$

$$\Rightarrow a = 4$$

अतः घन की प्रत्येक कोर की लंबाई 4cm है।

परिणामी घनाभ के लिए

$$\text{लंबाई } (l) = 4 + 4 = 8\text{cm}$$

$$\text{चौड़ाई } (b) = 4\text{cm}$$

$$\text{ऊँचाई } (h) = 4\text{cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{परिणामी घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2(lb + bh + hl) \\ &= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 \\ &\quad + 4 \times 8) \end{aligned}$$

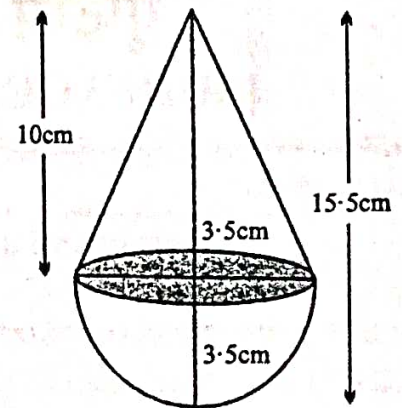
$$= 2(32 + 16 + 32)$$

$$= 2(80) = 160\text{cm}^2.$$

उत्तर

प्रश्न 4. एक खिलौना त्रिज्या 3.5cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



शंकु के आधार की त्रिज्या = 3.5cm

\therefore अर्द्धगोले की त्रिज्या = 3.5cm

खिलौने की कुल ऊँचाई = 15.5cm

\therefore शंकु की ऊँचाई = $15.5 - 3.5 = 12\text{cm}$

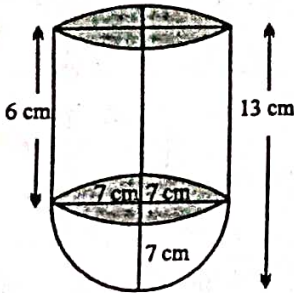
$$\begin{aligned} \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई} &= \sqrt{(3.5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{12.25 + 144} \\ &= \sqrt{156.25} = 12.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

अतः,

$$\begin{aligned} \text{खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\ &\quad + \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\ &= 2\pi(3.5)^2 + \pi(3.5)(12.5) \\ &= 24.5\pi + 43.75\pi \\ &= 68.25\pi \\ &= 68.25 \times \frac{22}{7} = 214.5 \text{ cm}^2. \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 5. कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



$$\begin{aligned} \therefore \text{खोखले अर्धगोले का व्यास} &= 14 \text{ cm} \\ \therefore \text{खोखले अर्धगोले की त्रिज्या} &= \frac{14}{2} = 7 \text{ cm} \\ \therefore \text{खोखले बेलन के आधार की त्रिज्या} &= 7 \text{ cm} \\ \text{बर्तन की कुल ऊँचाई} &= 13 \text{ cm} \\ \therefore \text{खोखले बेलन की ऊँचाई} &= 13 - 7 = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

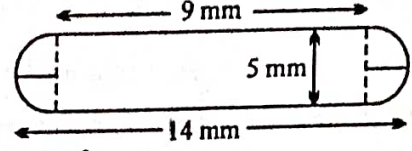
अतः

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = खोखले अर्धगोले का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल + खोखले बेलन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= 2\pi(7)^2 + 2\pi(7)(6) \\ &= 98\pi + 84\pi = 182\pi \\ &= 182 \times \frac{22}{7} \\ &= 26 \times 22 = 572 \text{ cm}^2. \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



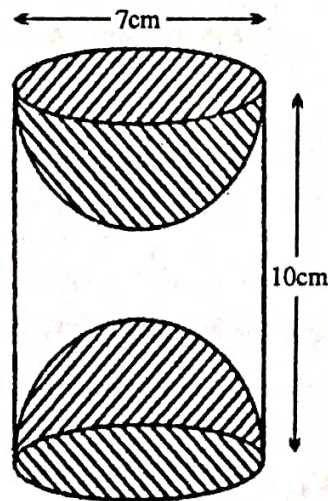
माना बेलन की लंबाई $l = 9 \text{ mm}$,

त्रिज्या r (बेलन की एवं अर्धगोले की) $= \frac{5}{2} \text{ mm}$

$$\begin{aligned} \text{कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\ &\quad + 2 \times \text{अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\ &= 2\pi r l + 2 \times 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r(l + 2r) \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \left(9 + 2 \times \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{220}{14} (14) = 220 \text{ mm}^2. \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 7. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi(3.5)(10) + 2[2\pi(3.5)^2]$$

$$= 70\pi + 49\pi = 119\pi$$

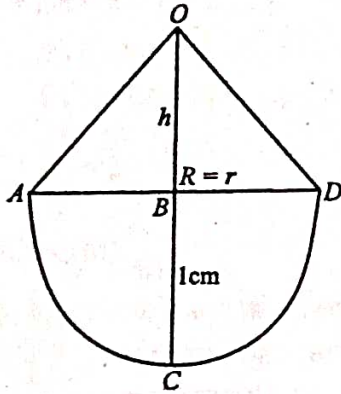
$$= 119 \times \frac{22}{7}$$

$$= 17 \times 22 = 374 \text{ cm}^2.$$

उत्तर

प्रश्न 8. एक ठोस एक अर्ध गोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है, जिनकी त्रिज्याएँ 1cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल :



ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्ध गोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r + \frac{2}{3}\pi r^3,$$

($\because h = r, R = r, R =$ अर्ध गोले की त्रिज्या,
 $r =$ शंकु की त्रिज्या, $h =$ शंकु की ऊँचाई)

$$= \frac{\pi}{3}r^3(1+2) = \frac{\pi}{3}r^3 \cdot 3$$

$$= \pi r^3, \quad (\because r = 1\text{cm})$$

$$= \pi \text{ cm}^3.$$

उत्तर

प्रश्न 9. मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि शंकु की त्रिज्या = r cm एवं ऊँचाई = h cm है।

गोले की त्रिज्या = R cm है।

\therefore यहाँ शंकु का आयतन = गोले का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$r^2 h = 4R^3$$

$$6 \times 6 \times 24 = 4R^3$$

$$\frac{6 \times 6 \times 6 \times 4}{4} = R^3$$

$$6^3 = R^3$$

$$\therefore R = 6 \text{ cm.}$$

उत्तर

प्रश्न 10. व्यास 1cm वाली 8cm लंबी ताँबे की एक छड़ को एकसमान चौड़ाई वाले 18 m लंबे एक तार के रूप में खींचा जाता (बदला जाता) है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल : छड़ का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8,$$

$$\left[\because r = \frac{1}{2} \text{ cm तथा } h = 8 \text{ cm} \right]$$

$$= 2\pi \text{ cm}^3$$

समान आयतन वाले तार की लंबाई = 18 m = 1800 cm

अब तार का आयतन = छड़ का आयतन

$$\pi R^2 \times 1800 = 2\pi,$$

[$\because R =$ तार के अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या]

$$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{900}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{30} \text{ cm}$$

$$\text{व्यास} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \text{ cm}$$

$$\therefore \text{ तार की चौड़ाई} = \text{ तार का व्यास} = \frac{1}{15} \text{ cm.}$$

उत्तर

प्रश्न 11. विमाओं $5.5\text{cm} \times 10\text{cm} \times 3.5\text{cm}$ वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75cm व्यास और 2mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ?

हल : चाँदी के एक सिक्के के लिए—

$$\text{व्यास} = 1.75\text{cm}$$

$$\therefore \text{त्रिज्या } (r) = \frac{1.75}{2}\text{cm} = \frac{7}{8}\text{cm}$$

$$\text{मोटाई } (h) = 2\text{mm} = \frac{2}{10}\text{cm} = \frac{1}{5}\text{cm}$$

$$\therefore \text{चाँदी के एक सिक्के का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$= \pi \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{49}{320} \pi \text{cm}^3$$

माना n सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा।

$$\text{तब, } n \text{ सिक्कों का आयतन} = n \cdot \frac{49\pi}{320} \text{cm}^3$$

घनाभ के लिए—

$$\text{लंबाई } (L) = 5.5\text{cm}$$

$$\text{चौड़ाई } (B) = 10\text{cm}$$

$$\text{ऊँचाई } (H) = 3.5\text{cm}$$

$$\therefore \text{घनाभ का आयतन} = LBH = 5.5 \times 10 \times 3.5 \\ = 192.5 = \frac{1925}{10} = \frac{385}{2}$$

प्रश्नानुसार n सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$$n \frac{49\pi}{320} = \frac{385}{2}$$

$$n = \frac{385}{2} \times \frac{320}{49} \times \frac{7}{22} = 400 \text{ सिक्के।}$$

अतः 400 सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा।

उत्तर

●●

अध्याय 14

[STATISTICS]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	—	—	1	1 + 1 + 4 = 6 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. माध्यक, बहुलक एवं माध्य के मध्य संबंध है—

(a) 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य

(b) बहुलक = माध्य + माध्यक

(c) बहुलक = 3 माध्यक + 3 माध्य

(d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—1. (a).

प्रश्न 2. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. 1, 2, 3, 4, 5 का समांतर माध्य क्या होगा ?

2. 2, 4, 8, 7, 5, 4, 9, 6, 7, 1, 7 का बहुलक क्या होगा ?

उत्तर—1. 3, 2. 7.

प्रश्न 3. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए—

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्टरी के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

हल : कल्पित माध्य $a = 150, h = 20$ लीजिए।

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 150}{20}$	$f_i u_i$
100 - 120	12	110	-40	-2	-24
120 - 140	14	130	-20	-1	-14
140 - 160	8	150	0	0	0
160 - 180	6	170	20	1	6
180 - 200	10	190	40	2	20
योग	$\sum f_i = 50$				$\sum f_i u_i = -12$

पद (पग) विचलन विधि के प्रयोग से,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

$$= 150 + \left(\frac{-12}{50} \right) \times 20$$

$$= 150 - 4.8 = 145.20 \text{ रु.। उत्तर}$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है—

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : कल्पित माध्य $a = 225, h = 50$

दैनिक व्यय (₹ में)	परिवारों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
100 - 150	4	125	-2	-8
150 - 200	5	175	-1	-5
200 - 250	12	225	0	0
250 - 300	2	275	+1	+2
300 - 350	2	325	+2	+4
योग	$\sum f_i = 25$			$\sum f_i u_i = -7$

$$\therefore \text{माध्य } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 225 - 7 \times 2$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 225 - 14$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 225 + \frac{(-7)}{25} \times 50$$

$$\Rightarrow \bar{x} = ₹ 211.$$

उत्तर

प्रश्न 5. किसी कक्षा अध्यापिका ने पूरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकार्ड की। एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए—

दिनों की संख्या	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

हल : आइए यहाँ प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग करें—

दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$f_i x_i$
0 - 6	11	3	33
6 - 10	10	8	80
10 - 14	7	12	84
14 - 20	4	17	68
20 - 28	4	24	96
28 - 38	3	33	99
38 - 40	1	39	39
योग	40		499

$$\therefore \text{माध्य} \quad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{499}{40} = 12.475$$

अतः माध्य = 12.48 दिन।

उत्तर

प्रश्न 6. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए—

साक्षरता दर (% में)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हल : $a = 70, h = 10$ लीजिए।

साक्षरता दर (%) में	नगरों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$d_i = x_i - 70$	$u_i = \frac{x_i - 70}{10}$	$f_i u_i$
45 - 55	3	50	-20	-2	-6
55 - 65	10	60	-10	-1	-10
65 - 75	11	70	0	0	0
75 - 85	8	80	10	1	8
85 - 95	3	90	20	2	6
योग	35				-2

पद-विचलन विधि का प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 70 + \left(\frac{-2}{35} \right) \times 10 \\ &= 70 - \frac{4}{7} = 70 - 0.57 = 69.43\% \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 7. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च रु. 18 है। लुप्त बारंबारता

ज्ञात कीजिए—

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल : माना कि कल्पित माध्य $A = 16$, वर्ग अंतराल $h = 2$, अतः $u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 16}{2}$

वर्ग अंतराल	मध्य मान (x_i)	f_i	$d_i = x_i - 16$	$u_i = \frac{x_i - 16}{2}$	$f_i u_i$
11 - 13	12	7	-4	-2	-14
13 - 15	14	6	-2	-1	-6
15 - 17	16	9	0	0	0
17 - 19	18	13	2	1	13
19 - 21	20	f	4	2	$2f$
21 - 23	22	5	6	3	15
23 - 25	24	4	8	4	16
योग		$N = \sum f_i = f + 44$			$\sum f_i u_i = 2f + 24$

यहाँ $\bar{x} = 18, A = 16$ और $h = 2$

$$\therefore \bar{x} = A + h \left(\frac{1}{N} \sum f_i u_i \right)$$

$$\Rightarrow 18 = 16 + 2 \left(\frac{2f + 24}{f + 44} \right)$$

$$\Rightarrow 2 = 2 \left(\frac{2f + 24}{f + 44} \right)$$

$$\Rightarrow f + 44 = 2f + 24$$

$$\Rightarrow 2f - f = 44 - 24$$

$$\Rightarrow f = 20.$$

उत्तर

प्रश्न 8. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा मोहल्ले के 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए—

परिवार माप	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

$h = 2$ (वर्ग की माप)

$f_1 = 8$ (बहुलक वर्ग की बारंबारता)

$f_0 = 7$ (बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारंबारता)

$f_2 = 2$ (बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारंबारता)

हल : यहाँ अधिकतम बारंबारता 8 है, तथा इसके संगत वर्ग 3 - 5 है।

अतः बहुलक वर्ग 3 - 5 है।

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right) \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7} = \frac{23}{7} = 3.286.$$

उत्तर

$l = 3$ (बहुलक वर्ग की निम्न सीमा)

प्रश्न 9. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है—

आयु (वर्षों में)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : बहुलक—यहाँ, अधिकतम वर्ग बारंबारता 23 है तथा इस बारंबारता का संगत वर्ग 35 - 45 है। अतः बहुलक वर्ग 35 - 45 है।

अब, वर्ग माप (h) = 10, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 35,
 बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 23,
 बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 21,
 बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 14

$$\therefore \text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14} \right) \times 10$$

$$= 35 + \frac{2}{11} \times 10 = 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.8 \text{ (लगभग)}$$

$$= 36.8 \text{ वर्ष (लगभग)}$$

उत्तर

प्रश्न 10. किसी स्कूल की कक्षा X की 51 लड़कियों की ऊँचाइयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए—

ऊँचाई (cm में)	140 से कम	145 से कम	150 से कम	155 से कम	160 से कम	165 से कम
लड़कियों की संख्या	4	11	29	40	46	51

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल :

वर्ग अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
140 से कम	4	4
140 - 145	7	11 → cf
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51
योग	$n = 51$	

अब $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ जो कि वर्ग अंतराल 145 - 150 के अंतर्गत है।

$\therefore l =$ निम्न सीमा = 145

$$\frac{n}{2} = 25.5$$

$cf =$ वर्ग अंतराल 145 - 150 के ठीक पहले की संचयी बारंबारता

$$cf = 11$$

$$f = 18, h = \text{वर्ग माध्य} = 5$$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$= 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \left(\frac{14.5}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03.$$

उत्तर

प्रश्न 11. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो | Δx और y के मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
योग	60

हल : यहाँ दिया गया है कि माध्यक 28.5 है।

$$\text{या } n = \sum f_i = 60$$

अब हम निम्नलिखित संचयी बारंबारता सारणी बनायेंगे—

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5 + x
20 - 30	20	25 + x
30 - 40	15	40 + x
40 - 50	y	40 + x + y
50 - 60	5	45 + x + y
योग	60	

अब, वर्ग माप (h) = 10, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 35,
 बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 23,
 बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 21,
 बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 14

$$\therefore \text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14} \right) \times 10$$

$$= 35 + \frac{2}{11} \times 10 = 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.8 \text{ (लगभग)}$$

$$= 36.8 \text{ वर्ष (लगभग)}$$

उत्तर

प्रश्न 10. किसी स्कूल की कक्षा X की 51 लड़कियों की ऊँचाइयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए—

ऊँचाई (cm में)	140 से कम	145 से कम	150 से कम	155 से कम	160 से कम	165 से कम
लड़कियों की संख्या	4	11	29	40	46	51

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल :

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
140 से कम	4	4
140-145	7	11 \rightarrow cf
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51
योग	$n = 51$	

अब $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ जो कि वर्ग अंतराल 145-150 के अंतर्गत है।

$$\therefore l = \text{निम्न सीमा} = 145$$

$$\frac{n}{2} = 25.5$$

cf = वर्ग अंतराल 145-150 के ठीक पहले की संचयी बारंबारता

$$cf = 11$$

$$f = 18, h = \text{वर्ग माध्य} = 5$$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$= 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \left(\frac{14.5}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03.$$

उत्तर

प्रश्न 11. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो | Δx और y के मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
योग	60

हल : यहाँ दिया गया है कि माध्यक 28.5 है।

$$\text{या } n = \sum f_i = 60$$

अब हम निम्नलिखित संचयी बारंबारता सारणी बनायेंगे—

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	5	5
10-20	x	$5 + x$
20-30	20	$25 + x$
30-40	15	$40 + x$
40-50	y	$40 + x + y$
50-60	5	$45 + x + y$
योग	60	

$$\begin{aligned} n &= 60 \\ \Rightarrow 45 + x + y &= 60 \\ \Rightarrow x + y &= 60 - 45 \\ \Rightarrow x + y &= 15 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

माध्यक 28.5 है, जो वर्ग 20 - 30 में स्थित है।

अतः $l = 20, f = 20, cf = 5 + x, h = 10$

$$\therefore \text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \left(\frac{\frac{60}{2} - (5 + x)}{20} \right) \times 10$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \frac{25 - x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25 - x}{2} = 28.5 - 20$$

$$\Rightarrow \frac{25 - x}{2} = 8.5$$

$$\Rightarrow 25 - x = 8.5 \times 2$$

$$\Rightarrow 25 - x = 17$$

$$\Rightarrow x = 25 - 17 = 8$$

समी. (1) व (2) से,

$$8 + y = 15$$

$$\Rightarrow y = 15 - 8 = 7$$

अतः, x और y के मान क्रमशः 8 और 7 हैं।

...

उत्तर

••

अध्याय 15

प्रायिकता

[PROBABILITY]

वार्षिक परीक्षा में अधिभार

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	2	—	—	1 + 1 + 2 + 2 = 6 अंक

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए—

1. किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता यदि P है, तो उसके घटित न होने की प्रायिकता होगी—

(a) $\frac{1}{P}$

(b) $\frac{2}{P}$

(c) $-P$

(d) $1 - P$

2. निम्न में से कौन-सा मान किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती—

(a) $\frac{1}{3}$

(b) 0.1

(c) 3%

(d) $\frac{17}{16}$

3. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती—

(a) $\frac{2}{3}$

(b) -1.5

(c) 15%

(d) 0.7

उत्तर—1. (d), 2. (d), 3. (b).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. किसी असंभव घटना की प्रायिकता होती है।
2. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता होती है।
3. प्रायिकता का मान सदैव के बीच होता है।

उत्तर—1. 0, 2. 1, 3. 0 और 1.

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए—

1. किसी घटना की प्रायिकता 1 से अधिक नहीं हो सकती।

2. किसी घटना की प्रायिकता 1 से अधिक होती है।
3. किसी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द / वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. किसी घटना की प्रायिकता और उस घटना के नहीं होने की प्रायिकता का योग कितना होगा ?
2. किसी असंभव घटना की प्रायिकता कितनी होगी ?
3. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता कितनी होगी ?

उत्तर—1. 1, 2. 0, 3. 1.

प्रश्न 5. एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। साथ ही एक पट प्राप्त करने की भी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : (i) एक सिक्के के लिए $n(S) = 2 = \{H, T\}$

$A =$ माना एक सिक्के की उछाल में चित आने की घटना है।

$$= \{H\}$$

$$n(A) = 1$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) पट प्राप्त करने की प्रायिकता = चित न आने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 6. मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं—

(i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

(ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : एक पासे की फेंक में $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\therefore n(S) = 6$$

(i) माना $A = 4$ से बड़ी संख्या का प्राप्त होना = $\{5, 6\}$

$$\therefore n(A) = 2$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) माना $B = 4$ से छोटी या इसके बराबर संख्या का प्राप्त होना = $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\therefore n(B) = 4$$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 7. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्न-लिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए—

(i) एक अभाज्य संख्या (ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या (iii) एक विषम संख्या।

हल : माना $S =$ पासे की एक फेंक पर सभी संभव परिणाम

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

(i) माना $A =$ एक अभाज्य का आना

$$= \{2, 3, 5\}$$

$$n(A) = 3$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) माना $B =$ दो और छः के बीच कोई संख्या का आना

$$= \{3, 4, 5\}$$

$$n(B) = 3$$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

(iii) माना $C =$ एक विषम संख्या का आना

$$= \{1, 3, 5\}$$

$$n(C) = 3$$

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 8. एक थैले में एक लाल गेंद, एक नीली गेंद और एक पीली गेंद है तथा सभी गेंदें एक ही साइज की हैं। कृतिका बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद —

(i) पीली होगी, (ii) लाल होगी, (iii) नीली होगी ?

हल : थैले में कुल गेंदें $n(S) = 1$ लाल + 1 नीली + 1 पीली
 $n(S) = 3$

(i) P (पीली गेंद का निकलना) = $\frac{1}{3}$. उत्तर

(ii) P (लाल गेंद का निकलना) = $\frac{1}{3}$. उत्तर

(iii) P (नीली गेंद का निकलना) = $\frac{1}{3}$. उत्तर

प्रश्न 9. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है ? (ii) नीला है ? (iii) लाल है ?

हल : डिब्बे में नीले कंचों की संख्या = 3
 डिब्बे में सफेद कंचों की संख्या = 2
 डिब्बे में लाल कंचों की संख्या = 4
 \therefore डिब्बे में कुल कंचों की संख्या = 3 + 2 + 4 = 9
 \therefore सभी संभव परिणामों की संख्या = 9

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

या $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

(i) डिब्बे में 2 सफेद कंचे हैं।

\therefore प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 2

अतः $P(\text{सफेद कंचा निकालना}) = \frac{2}{9}$. उत्तर

(ii) डिब्बे में 3 नीले कंचे हैं।

\therefore प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 3

अतः $P(\text{नीचे कंचा निकालना}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. उत्तर

(iii) डिब्बे में 4 लाल कंचे हैं।

\therefore प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 4

अतः $P(\text{लाल कंचा निकालना}) = \frac{4}{9}$. उत्तर

प्रश्न 10. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गेंद (i) लाल हो ? (ii) लाल नहीं हो ?

हल : (i) माना E घटना है कि थैले में से निकाली गई गेंद लाल है।

थैले में कुल गेंदों की संख्या = 3 + 5 = 8

\therefore सभी संभव परिणामों की संख्या = 8

\therefore थैले में 3 लाल गेंदे हैं

\therefore E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

अतः

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

उत्तर

(ii) प्रायिकता कि निकाली गई गेंद लाल नहीं है

= 1 - प्रायिकता कि निकाली गई गेंद लाल है

$$= 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

उत्तर

प्रश्न 11. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली

(i) संतरे की महक वाली है ?

(ii) नीबू की महक वाली है ?

उत्तर— (i) प्रायिकता कि वह निकाली गई गोली संतरे की महक वाली है 0 है क्योंकि थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं।

(ii) प्रायिकता कि वह निकाली गई गोली नीबू की महक वाली है 1 है क्योंकि थैले में सभी मीठी गोलियाँ केवल नीबू की महक वाली हैं।

प्रश्न 12. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) लाल है ? (ii) सफेद है ? (iii) हरा नहीं है ?

हल : डिब्बे में लाल कंचों की संख्या = 5

डिब्बे में सफेद कंचों की संख्या = 8

डिब्बे में हरे कंचों की संख्या = 4

∴ डिब्बे में कुल कंचों की संख्या = 5 + 8 + 4 = 17

∴ सभी संभव परिणामों की संख्या = 17

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$\text{या } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

(i) डिब्बे में 5 लाल कंचे हैं।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 5

$$\text{अतः } P(\text{लाल कंचा निकालना}) = \frac{5}{17} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) डिब्बे में 8 सफेद कंचे हैं।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 8

$$\text{अतः } P(\text{सफेद कंचा निकालना}) = \frac{8}{17} \quad \text{उत्तर}$$

(iii) डिब्बे में 5 + 8 = 13 कंचे हरे नहीं हैं।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 13

$$\text{अतः } P(\text{हरा कंचा नहीं निकालना}) = \frac{13}{17} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 13. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक

गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता

परिकलित कीजिए कि यह पत्ता (i) एक इक्का होगा

(ii) एक इक्का नहीं होगा।

हल : (i) माना $P(A)$ = निकाले गए पत्ते का इक्का होने की

प्रायिकता है।

$$n(A) = 4$$

$$n(S) = 52$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

उत्तर

(ii) चूंकि $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

∴ $P(\bar{A})$ = निकाले गए पत्ते का इक्का नहीं होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

उत्तर

प्रश्न 14. एक डिब्बे में 100 कमीजें हैं, जिसमें से 88 अच्छी हैं तथा 8 में थोड़ी सी खराबी है और 4 में अधिक खराबी है। एक व्यापारी जिम्मी वे ही कमीजें स्वीकार करता है जो अच्छी हैं जबकि एक अन्य व्यापारी सुजाता उन्हीं कमीजों को अस्वीकार करती है जिनमें खराबी अधिक है। इस डिब्बे में से एक कमीज को यादृच्छया रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कमीज—

(i) जिम्मी को स्वीकार हो ? (ii) सुजाता को स्वीकार हो ?

हल : (i) जिम्मी के अनुकूल परिणामों की संख्या = 88

$$\therefore P(\text{जिम्मी को कमीज स्वीकार करना}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

उत्तर

(ii) सुजाता के अनुकूल परिणामों की संख्या = 88 + 8 = 96

$$P(\text{कमीज सुजाता को स्वीकार है}) = \frac{96}{100} = 0.96 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 15. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं।

इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी

क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा ?

हल : बल्बों की कुल संख्या = 20;

∴ सभी संभव परिणामों की संख्या = 20

माना E घटना है कि समूह में से यादृच्छया निकाला गया बल्ब खराब है। तब, E के अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है क्योंकि खराब बल्बों की संख्या 4 है।

∴ $P(E) = P(\text{बल्ब खराब है})$

$$= \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

उत्तर

प्रश्न 16. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की क्या प्रायिकता है ?

हल : माना $P(A) = 0.62$ (संगीता) के जीतने की प्रायिकता

$P(B) =$ रेशमा के जीतने की प्रायिकता।

परंतु $P(A) + P(B) = 1$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - 0.62$$

$$= 0.38.$$

उत्तर

प्रश्न 17. सविता एवं हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों (i) के जन्म दिन भिन्न-भिन्न हों (ii) का जन्मदिन एक ही हो ? (लीप का वर्ष छोड़ते हुए।)

हल : (i) जब दोनों के जन्म दिन भिन्न-भिन्न हैं। तब

अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 365 - 1 = 364$

$$n(S) = 365$$

$$\therefore P(\text{दोनों का जन्म दिन भिन्न-भिन्न हों}) = \frac{364}{365}$$

उत्तर

(ii) P (दोनों के जन्म दिन एक ही दिन हों)

$$= 1 - P(\text{दोनों का जन्म दिन भिन्न-भिन्न है।})$$

$$= 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$$

उत्तर

प्रश्न 18. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : 'E नहीं' की प्रायिकता $= P(E \text{ नहीं})$

$$= P(\bar{E})$$

$$= 1 - P(E)$$

$$= 1 - 0.05 = 0.95.$$

उत्तर

प्रश्न 19. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो ?

हल : प्रायिकता कि 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो

$$= 1 - \text{प्रायिकता कि 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन}$$

एक ही दिन न हो

$$= 1 - 0.992 = 0.008.$$

उत्तर

●●